ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2018

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE LI15 –
SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Devi programmare il funzionamento di una macchina che viene adoperata nella produzione industriale di mattonelle per pavimenti. Le mattonelle sono di forma quadrata di lato 1 (in un'opportuna unità di misura) e le fasi di lavoro sono le seguenti:

- si sceglie una funzione $y = f(x)$ definita e continua nell'intervallo [0,1], che soddisfi le condizioni:

  a) $f(0) = 1$;

  b) $f(1) = 0$;

  c) $0 < f(x) < 1$ per $0 < x < 1$.

- La macchina traccia il grafico Γ della funzione $y = f(x)$ e i grafici simmetrici di Γ rispetto all'asse *y*, all'asse *x* e all'origine *O*, ottenendo in questo modo una curva chiusa Λ, passante per i punti (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1), simmetrica rispetto agli assi cartesiani e all'origine, contenuta nel quadrato *Q* di vertici (1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1).
- La macchina costruisce la mattonella colorando di grigio l'interno della curva chiusa Λ e lasciando bianca la parte restante del quadrato *Q*; vengono quindi mostrate sul display alcune mattonelle affiancate, per dare un'idea dell'aspetto del pavimento.

Il manuale d'uso riporta un esempio del processo realizzativo di una mattonella semplice:

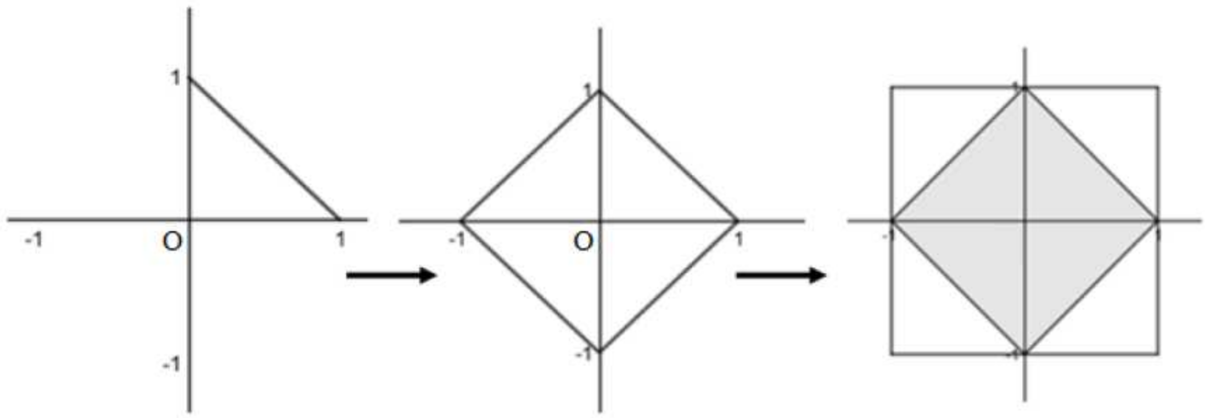


Grafico Γ Curva Λ Mattonella

Figura 1

La pavimentazione risultante è riportata di seguito:

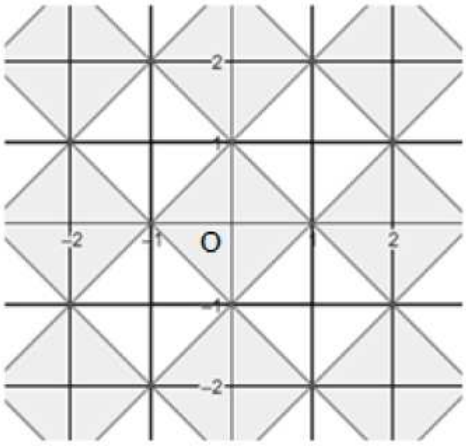


Figura 2

1. Con riferimento all'esempio, determina l'espressione della funzione $y = f(x)$ e l'equazione della curva Λ, così da poter effettuare una prova e verificare il funzionamento della macchina.

Ti viene richiesto di costruire una mattonella con un disegno più elaborato che, oltre a rispettare le condizioni a), b) e c) descritte in precedenza, abbia $f'(0) = 0$ e l'area della parte colorata pari al 55% dell'area dell'intera mattonella. A tale scopo, prendi in considerazione funzioni polinomiali di secondo grado e di terzo grado.

2. Dopo aver verificato che non è possibile realizzare quanto richiesto adoperando una funzione polinomiale di secondo grado, determina i coefficienti $a, b, c, d \in \Re$ della funzione $f(x)$ polinomiale di terzo grado che soddisfa le condizioni poste. Rappresenta infine in un piano cartesiano la mattonella risultante.

Vengono proposti a un cliente due tipi diversi di disegno, derivanti rispettivamente dalle funzioni $a_n(x) = 1 - x^n$ e $b_n(x) = (1-x)^n$, considerate per $x \in [0, 1]$, con n intero positivo.

3. Verifica che al variare di n tutte queste funzioni rispettano le condizioni a), b) e c). Dette $A(n)$ e $B(n)$ le aree delle parti colorate delle mattonelle ottenute a partire da tali funzioni a_n e b_n, calcola $\lim\limits_{n \to +\infty} A(n)$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} B(n)$ ed interpreta i risultati in termini geometrici.

Il cliente decide di ordinare 5.000 mattonelle con il disegno derivato da $a_2(x)$ e 5.000 con quello derivato da $b_2(x)$. La verniciatura viene effettuata da un braccio meccanico che, dopo aver depositato il colore, torna alla posizione iniziale sorvolando la mattonella lungo la diagonale. A causa di un malfunzionamento, durante la produzione delle 10.000 mattonelle si verifica con una probabilità del 20% che il braccio meccanico lasci cadere una goccia di colore in un punto a caso lungo la diagonale, macchiando così la mattonella appena prodotta.

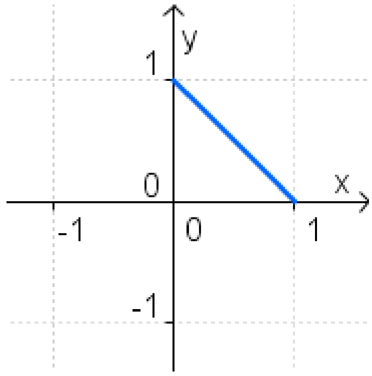
4. Fornisci una stima motivata del numero di mattonelle che, avendo una macchia nella parte non colorata, risulteranno danneggiate al termine del ciclo di produzione.

Punto 1

La funzione $f(x)$ definita e continua nell'intervallo $[0,1]$,
che soddisfa le condizioni: a , b , c è: $\boldsymbol{y = -x + 1}$.
Infatti:

a) $f\,(0) = 1$;
b) $f\,(1) = 0$;
c) $0 < f\,(x) < 1$; $\quad 0 < -x + 1 < 1$; $\quad -1 < -x < 1 - 1$;
$\quad -1 < -x < 0$; $\quad 1 > x > 0$; $\quad 0 < x < 1$.

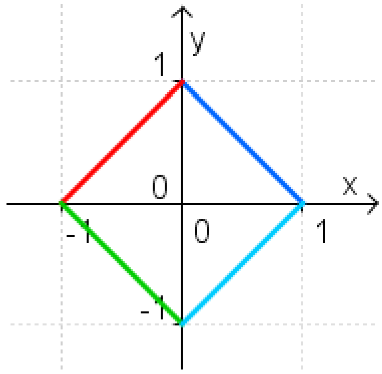
Il grafico Γ della funzione $y = f\,(x)$ è rappresentato a lato.



Il grafico simmetrico di Γ rispetto all'asse y è colorato in rosso
La funzione corrispondente è: $y = x + 1$

Il grafico simmetrico di Γ rispetto all'asse x è colorato in azzurro
La funzione corrispondente è: $y = x - 1$

Il grafico simmetrico di Γ rispetto all'Origine è colorato in verde
La funzione corrispondente è: $y = -x - 1$



Il grafico della curva chiusa Λ è l'unione dei quattro segmenti colorati.

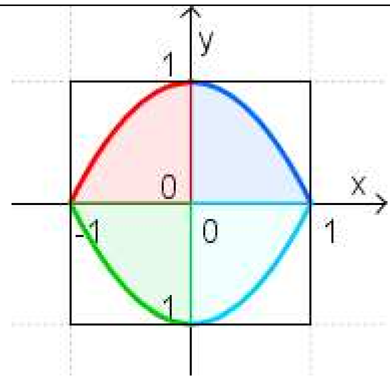
L'equazione corrispondente è: $y = \begin{cases} -|x| + 1 & se \;\; -1 \le x \le 1 \quad \wedge \quad y \ge 0 \\ -|x| - 1 & se \;\; -1 \le x \le 1 \quad \wedge \quad y < 0 \end{cases}$

Punto 2

Consideriamo adesso un disegno più elaborato della funzione $f\,(x)$.
Consideriamo pertanto, per come suggerito, una funzione polinomiale di secondo grado: $f\,(x) = ax^2 + bx + c$.
Essa deve soddisfare le condizioni a , b , c , d , e :

a) $f\,(0) = 1$; $\qquad c = 1$;
b) $f\,(1) = 0$; $\qquad a + b + c = 0$;
d) $f'\,(0) = 0$; $\qquad f'\,(x) = 2ax + b$; $\qquad 2a \cdot 0 + b = 0$; $\qquad b = 0$.

Da queste quattro prime condizioni si ricava la funzione: $f(x) = -x^2 + 1$



*Verifichiamo adesso la condizione **e** : "l'area della parte colorata deve essere pari al 55% dell'area dell'intera mattonella.*

L'area della parte colorata in azzurro è: $S_{Azzurra} = \int_0^1 (-x^2 + 1)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = -\frac{1}{3} + 1 - 0 = \frac{2}{3}$.

L'area della mattonella colorata è: $S_{Mattonella\ colorata} = 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$.

L'area dell'intera mattonella (colorata e bianca) è 4 .

Essendo il rapporto fra le due aree: $\frac{S_{Mattonella\ colorata}}{S_{Mattonella\ intera}} = \frac{\frac{8}{3}}{4} = \frac{2}{3} \cong 67\ \%$ *, la 5^a condizione non è verificata.*

Pertanto tale disegno di mattonella è da scartare.

Consideriamo adesso, per come suggerito, una funzione polinomiale di terzo grado: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Essa deve soddisfare le condizioni a , b , c , d , e :

a) $f(0) = 1$; $\qquad d = 1$;

b) $f(1) = 0$; $\qquad a + b + c + d = 0$;

c) $0 < f(x) < 1$;

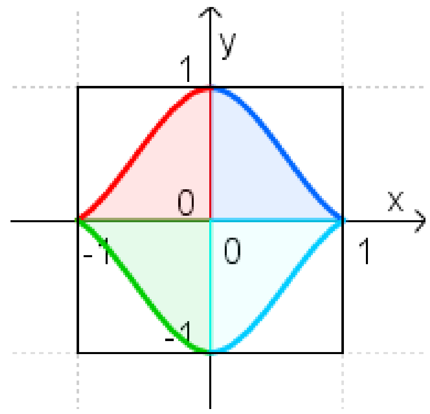
d) $f'(0) = 0$; $\qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$;

$3a \cdot 0 + 2b \cdot 0 + c = 0$; $\qquad c = 0$.

$$\begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = 0 \\ c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = 1 \\ a + b + 1 = 0 \\ c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = 1 \\ b = -a - 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Da queste quattro prime condizioni si ricava la famiglia di funzioni:

$f(x) = ax^3 - (a+1)x^2 + 1$



Consideriamo adesso la quinta condizione: "l'area della parte colorata deve essere pari al 55% dell'area dell'intera mattonella.

$$S_{Mattonella\ colorata} = 55\% \cdot 4 = \frac{55}{100} \cdot 4 = \frac{11}{5} .$$

L'area della parte colorata in azzurro è:

$$S_{Azzurra} = \int_0^1 (ax^3 - (a+1)x^2 + 1)\, dx = \left[a\frac{x^4}{4} - (a+1)\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = a\frac{1}{4} - (a+1)\frac{1}{3} + 1 =$$

$$= \frac{1}{4}a - \frac{1}{3}a - \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{12}a .$$

L'area della mattonella colorata è: $S_{Mattonella\ colorata} = 4 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{12}a\right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}a$.

Deve risultare:

$$S_{Mattonella\ colorata} = \frac{11}{5} ; \qquad \frac{8}{3} - \frac{1}{3}a = \frac{11}{5} ; \qquad 40 - 5a = 33 ; \qquad 5a = 7 ; \qquad a = \frac{7}{5} .$$

Pertanto la funzione richiesta è : $f(x) = \frac{7}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2 + 1$

Occorre fare una ulteriore verifica, la *<u>condizione **c**</u>* : $0 < f(x) < 1$ *per* $0 < x < 1$.

Tale verifica scaturisce dallo studio del grafico della funzione $f(x)$.

La funzione è definita, continua e derivabile $\forall\, x \in R$.

Interseca gli assi cartesiani nei punti $A\,(0\,;1)$ *e* $B\,(1\,;0)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{7}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2 + 1\right) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2 + 1\right) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{21}{5}x^2 - \frac{24}{5}x$$

$$f'(x) = 0 ; \qquad \frac{21}{5}x^2 - \frac{24}{5}x = 0 ; \qquad 21x^2 - 24x = 0 \qquad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_1 = \frac{8}{7} \end{matrix}$$

$f'(x) > 0$ *per* $x < 0 \ \vee\ x > \frac{8}{7}$ $\qquad f'(x) < 0$ *per* $0 < x < \frac{8}{7}$.

In $x_1 = 0$ *c'è un punto di massimo relativo* $\Rightarrow$ $A\,(0;1)$.

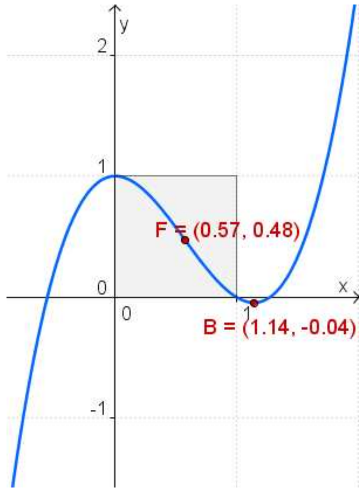
In $x_2 = \frac{8}{7}$ *c'è un punto di minimo relativo* $\Rightarrow$ $B\left(\frac{8}{7}; -\frac{11}{245}\right)$.

$$f''(x) = \frac{42}{5}x - \frac{24}{5}$$

$$f''(x) = 0 ; \qquad \frac{42}{5}x - \frac{24}{5} = 0 ; \qquad 42x - 24 = 0 ; \qquad x = \frac{4}{7} .$$

$f''(x) > 0$; $x > \frac{4}{7}$; $\qquad f''(x) < 0$; $x < \frac{4}{7}$ $\qquad \Rightarrow \qquad F\left(\frac{4}{7}; \frac{117}{245}\right)$ *è un punto di flesso.*

Dalla rappresentazione grafica della funzione $y = f\,(x)$
si deduce che: $0 < f(x) < 1$ *per* $0 < x < 1\,.$



Calcoli:

$$f\left(\frac{8}{7}\right) = \frac{7}{5}\left(\frac{8}{7}\right)^3 - \frac{12}{5}\left(\frac{8}{7}\right)^2 + 1 = \frac{7}{5}\cdot\frac{512}{7^3} - \frac{12}{5}\cdot\frac{64}{49} + 1 = \frac{512}{245} - \frac{768}{245} + 1 = \frac{512 - 768 + 245}{245} = -\frac{11}{245}.$$

$$f\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{7}{5}\left(\frac{4}{7}\right)^3 - \frac{12}{5}\left(\frac{4}{7}\right)^2 + 1 = \frac{7}{5}\cdot\frac{64}{7^3} - \frac{12}{5}\cdot\frac{16}{49} + 1 = \frac{64}{245} - \frac{192}{245} + 1 = \frac{64 - 192 + 245}{245} = \frac{117}{245}.$$

Punto 3

Consideriamo la prima famiglia di funzioni: $a_n(x) = 1 - x^n$ *e verifichiamo le tre condizioni:*

Condizione a : $a_n(0) = 1\,;\quad 1 - 0^n = 1\,;$ *Verificato*

Condizione b : $a_n(1) = 0\,;\quad 1 - 1^n = 0\,;$ *Verificato*

Condizione c : $0 < a_n(x) < 1$ *per* $0 < x < 1\,;$

$0 < x < 1\,;\quad 0 < x^n < 1\,;\quad -1 < -x^n < 0\,;\quad 1 - 1 < 1 - x^n < 1\,;\quad 0 < 1 - x^n < 1\,;$ *Verificato*

Consideriamo la seconda famiglia di funzioni: $\boldsymbol{b_n(x) = (1 - x)^n}$ *e verifichiamo le tre condizioni:*

Condizione a : $a_n(0) = 1\,;\quad 1 - 0^n = 1\,;$ *Verificato*

Condizione b : $a_n(1) = 0\,;\quad 1 - 1^n = 0\,;$ *Verificato*

Condizione c : $0 < a_n(x) < 1$ *per* $0 < x < 1\,;$

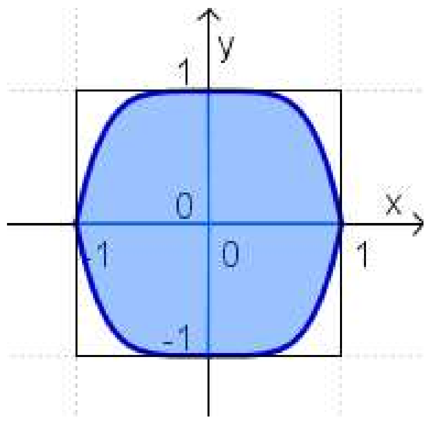
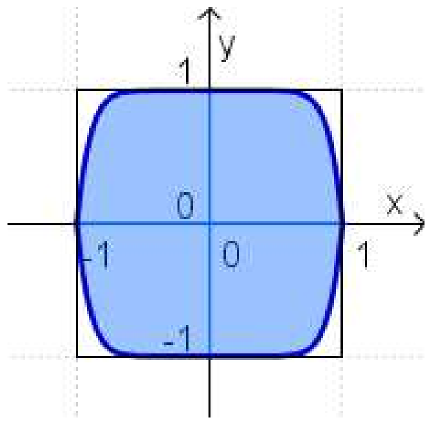
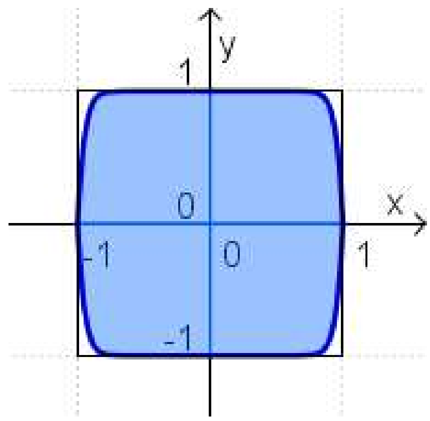
$0 < x < 1\,;\quad -1 < -x < 0\,;\quad 1 - 1 < 1 - x < 1\,;\quad 0 < 1 - x < 1\,;\quad 0 < (1 - x)^n < 1\,;$ *Verificato*

Calcoliamo l'area $\boldsymbol{A\,(n)}$ *della parte colorata della mattonella ottenuta dalla famiglia di funzioni* $a_n(x)\,.$

$$A\,(n) = 4\cdot\int_0^1 (1 - x^n\,)\,dx = 4\cdot\left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 4\cdot\left(1 - \frac{1^{n+1}}{n+1} - 0\right) = 4\cdot\frac{n+1-1}{n+1} = \frac{4\,n}{n+1}.$$

Calcoliamo il limite: $$\lim_{n\to+\infty} A\,(n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{4\,n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{4\,n}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{4}{1 + \frac{1}{n}} = 4\ .$$

L'interpretazione geometrica è la seguente:
"Quando $n \to +\infty$, *l'area della parte colorata della mattonella* $A\,(n) \to 4\,.$ *Ed essendo l'area dell'intera mattonella uguale proprio a 4, la mattonella, per* $n \to +\infty$, *tende a colorarsi per intera.*

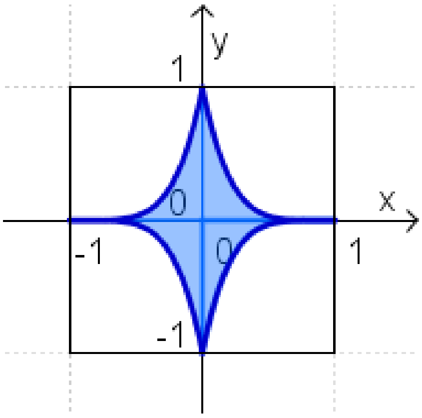
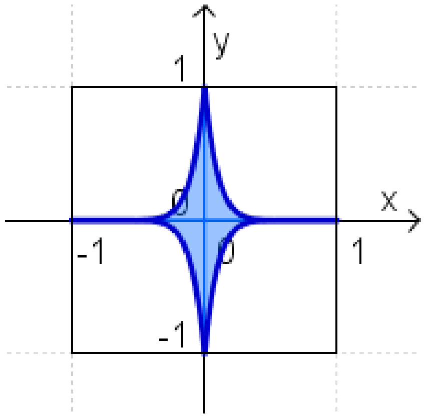
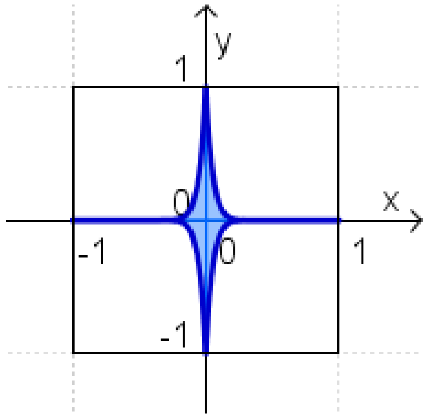
		
$a_5(x) = 1 - x^5$	$a_{10}(x) = 1 - x^{10}$	$a_{20}(x) = 1 - x^{20}$

Calcoliamo l'area $\boldsymbol{B\ (n)}$ *della parte colorata della mattonella ottenuta dalla famiglia di funzioni* $b_n(x)$ *.*

$$B\ (n) \;=\; 4\cdot\int_0^1 (1-x)^n\,dx \;=\; 4\cdot\left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \;=\; 4\cdot\left[-\frac{(1-1)^{n+1}}{n+1} \;-\; \left(-\frac{(1-0)^{n+1}}{n+1}\right)\right] \;=$$

$$=\; 4\cdot\left[0-\;\left(-\frac{(1)^{n+1}}{n+1}\right)\right] \;=\; 4\cdot\frac{1}{n+1} \;=\; \frac{4}{n+1}\ .$$

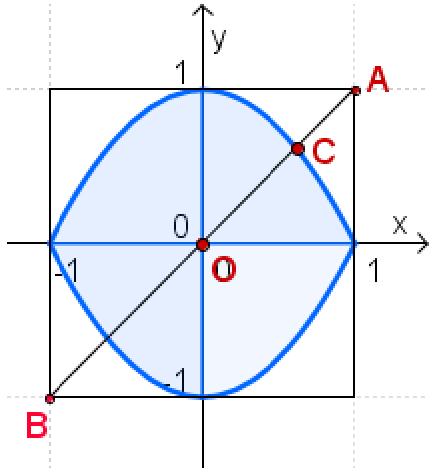
Calcoliamo il limite: $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} B\ (n) \;=\; \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n+1} \;=\; 0\ .$

<table>
<tr><td colspan="3">L'interpretazione geometrica è la seguente:
"Quando $n\to+\infty$, l'area della parte colorata della mattonella $A\ (n)$ tende a scomparire .</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$b_5(x)=(1-x)^5$</td><td>$b_{10}(x)=(1-x)^{10}$</td><td>$b_{20}(x)=(1-x)^{20}$</td></tr>
</table>

Punto 4

Consideriamo la mattonella derivata dalla funzione $A_2\,(x) = 1 - x^2$.

Per la simmetria della figura, la probabilità che la goccia cada sulla parte non colorata della diagonale è data dal rapporto tra la lunghezza del segmento AC e la lunghezza della metà della diagonale AO .



Occorre determinare le coordinate del punto C:

$$\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = x \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 - x^2 \\ \_ \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + x - 1 = 0 \\ \_ \end{cases}$$

Risolvo $x^2 + x - 1 = 0$; $\qquad \Delta = 1 + 4 = 5$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{array}{ll} x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \textit{Non accettabile} \\ x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \textit{Accettabile} \end{array} \quad \Rightarrow \quad C\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

$$p\,(A_2) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AO}} = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2 \cdot \left(\frac{2-\sqrt{5}+1}{2}\right)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Ma la goccia cade con probabilità del 20%.

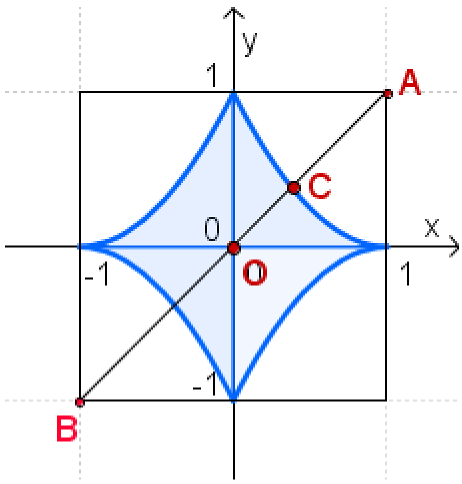
Quindi la probabilità che la macchina lasci una goccia lungo la parte della diagonale non colorata è :

$$p_A = 20\% \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{20}{100} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{10} \cong 7{,}64\%\,.$$

Pertanto le piastrelle del tipo A_2 *che potrebbero essere difettose sono:* $N_A = 7{,}64\% \cdot 5000 = 382$.

Consideriamo la mattonella derivata dalla funzione $B_2\,(x) = (1 - \mathrm{x})^2$.

La probabilità che la goccia cada sulla parte non colorata della diagonale è data dal rapporto tra la lunghezza del segmento AC e la lunghezza della metà della diagonale AO .



Occorre determinare le coordinate del punto C:

$$\begin{cases} y = (1 - x)^2 \\ y = x \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 + x^2 - 2x \\ \_ \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 3x + 1 = 0 \\ \_ \end{cases}$$

Risolvo $x^2 - 3x + 1 = 0$; $\qquad \Delta = 9 - 4 = 5$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{array}{ll} x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} & \textit{Accettabile} \\ x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} & \textit{Non accettabile} \end{array} \quad \Rightarrow \quad C\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\,;\,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).$$

$$p\,(B_2) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AO}} = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2 \cdot \left(\frac{2-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ma la goccia cade con probabilità del 20%.

Quindi la probabilità che la macchina lasci una goccia lungo la parte della diagonale non colorata è :

$$p_B = 20\% \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{20}{100} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{10} \cong 12{,}36\%\,.$$

Pertanto le piastrelle del tipo B_2 *che potrebbero essere difettose sono:* $N_B = 12{,}36\% \cdot 5000 = 618$.

In totale, 1000 mattonelle su 10000 potrebbero essere difettose.