ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2017

PROBLEMA 2

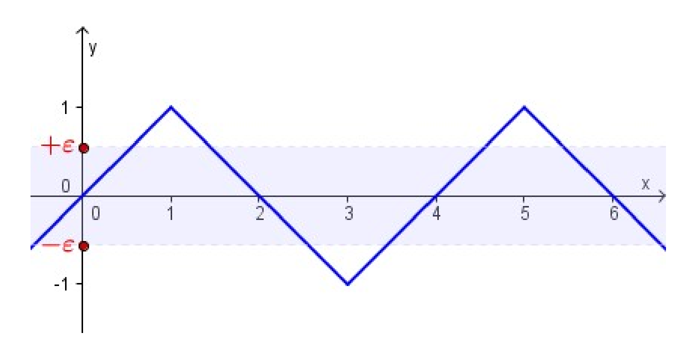
Punto 1

La funzione $f(x)$ *è continua* $\forall x \in R$.
La funzione è derivabile $\forall x \neq 2n+1$, $n \in Z$
La funzione $f(x)$ *è tale che* $-1 \leq f(x) \leq 1$.

Il limite $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \nexists$

Infatti:

- *non è verificata la definizione di limite infinito per una funzione all'infinito perché la funzione è limitata* $-1 \leq f(x) \leq +1$ *;*
- *non è verificata la definizione di limite finito per una funzione all'infinito:*
  perché se prendiamo un ε *tale che* $0 < \varepsilon < 1$
  non si riesce a determinare un valore $M > 0$
  tale che $\forall x > M$ $\quad f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$



Il limite $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

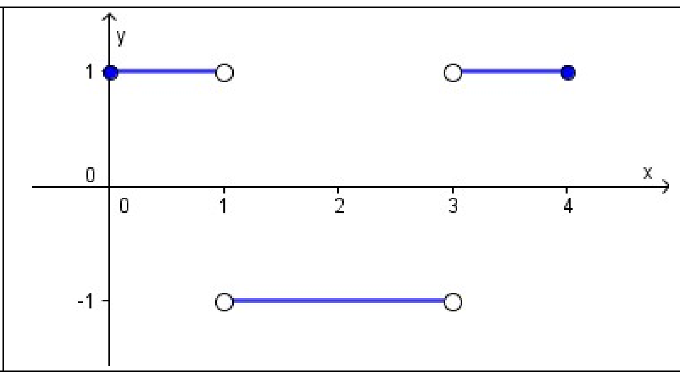
Infatti per $x \to +\infty$ *la funzione è limitata dalle due funzioni:* $-\frac{1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$

Essendo: $\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ $\quad$ *e* $\quad$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

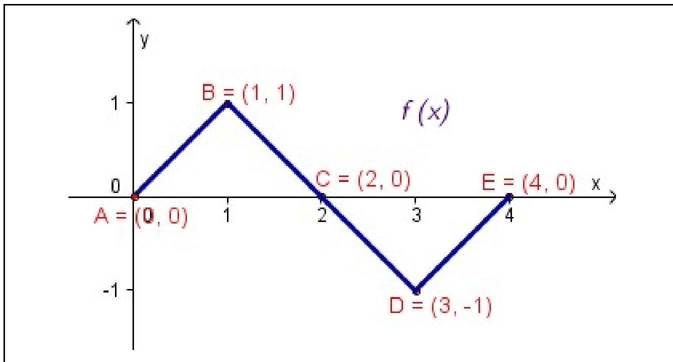
Per il Teorema del Confronto, si ha: $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

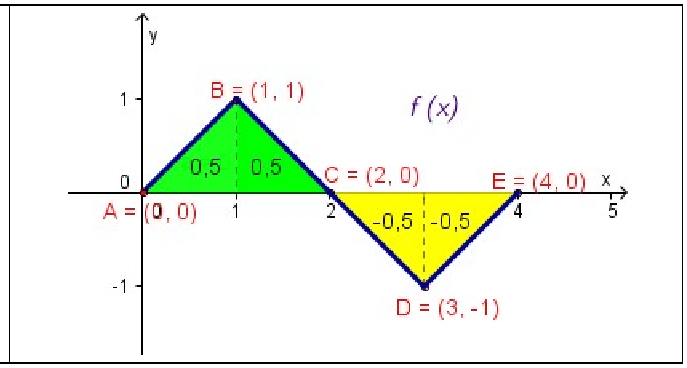
Il grafico della funzione $g(x) = f'(x)$ *nell'intervallo* $[0, 4]$ *è sotto rappresentato.*
La funzione non esiste nei punti $x = 1$ *e* $x = 3$ *perché in essi la funzione non è derivabile.*

$$g(x) = f'(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \ \vee \ 3 < x \leq 4 \\ -1 & 1 < x < 3 \end{cases}$$



Il grafico della funzione $h(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ *nell'intervallo* $[0\,,4]$ *si ricava effettuando le seguenti considerazioni sulla funzione* $f(x)$.



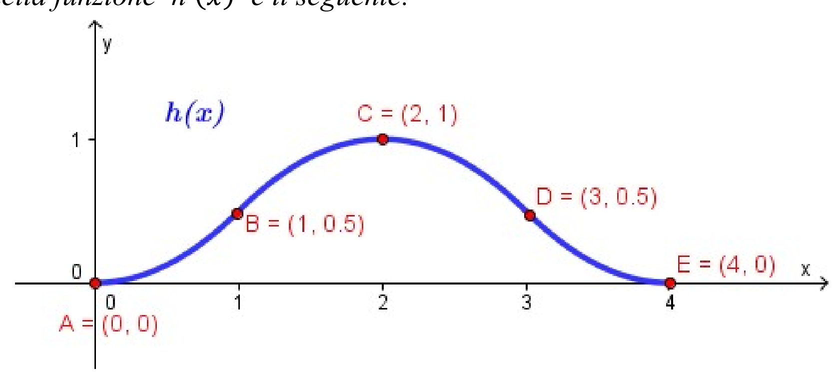


x	$f(x)$ *è continua in* $[0\,,4]$ $f(x)$ *è derivabile in* $[0\,,4] - \{1\,,3\}$	$h\,(x)$ *è continua e derivabile in* $[0\,,4]$	*Punti*
$x = 0$	$h'(0) = f(0) = 0$	$h(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$	$A(0\,;\,0)$
$0 < x < 1$	$h'(x) = f(x) > 0$	$h(x)$ *è positiva e crescente*	
$x = 1$	$h'(1) = f(1) = 1$	$Area = h(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = 0{,}5$	$B(1\,;\,0{,}5)$
$1 < x < 2$	$h'(x) = f(x) > 0$	$h(x)$ *è positiva e crescente*	
$x = 2$	$h'(2) = f(2) = 0$	$h(2) = \int_0^2 f(t)\,dt = 1$ *(massimo)*	$C(2\,;\,1)$
$2 < x < 3$	$h'(x) = f(x) < 0$	$h(x)$ *è positiva e decrescente*	
$x = 3$	$h'(3) = f(3) = -1$	$h(3) = \int_0^3 f(t)dt =$ $= \int_0^2 f(t)\,dt + \int_2^3 f(t)\,dt = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$	$D(3\,;\,0{,}5)$
$3 < x < 4$	$h'(x) = f(x) < 0$	$h(x)$ *è positiva e decrescente*	
$x = 4$	$h'(4) = f(4) = 0$	$h(4) = \int_0^4 f(t)dt =$ $= \int_0^2 f(t)\,dt + \int_2^4 f(t)\,dt = 1 - 1 = 0$	$E(4\,;\,0)$

La concavità della funzione $h(x)$ *si ricava dalle informazioni sulla monotonia della funzione* $f'(x)$.

x	$f(x)$	$h''(x) = f'(x)$	$h(x)$
$0 < x < 1$	$y = x$	$h''(x) = f'(x) = +1$	*Concavità positiva*
$1 < x < 3$	$y = -x + 2$	$h''(x) = f'(x) = -1$	*Concavità negativa*
$3 < x < 4$	$y = x + 4$	$h''(x) = f'(x) = +1$	*Concavità positiva*

Pertanto il grafico della funzione $h\,(x)$ *è il seguente:*



Punto 2.A

La funzione $s(x) = sen\,(bx)$ *ha periodo* $\frac{2\pi}{b}$ *con* $b \neq 0$.

Le due funzioni $s(x)$ *e* $f(x)$ *hanno lo stesso periodo se:* $\frac{2\pi}{b} = 4$ *cioè* $b = \frac{\pi}{2}$.

Pertanto la funzione $s(x)$ *è così definita:* $s(x) = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Punto 2.B

Disegniamo i grafici delle funzioni $s(x)$ *e* $f(x)$ *che rientrano nel quadrato OABC.*

Determiniamo le aree delle tre zone in cui resta diviso il quadrato OABC dalle funzioni $s(x)$ *e* $f(x)$.

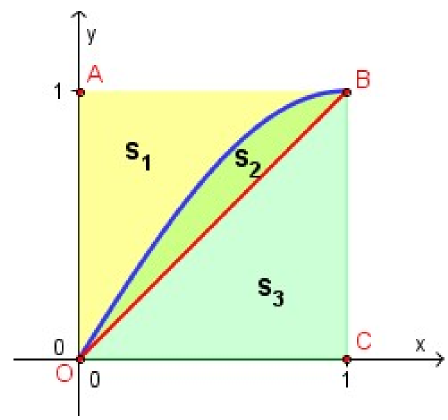
$$S_3 = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \int_0^1 sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx - S_3 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^1 \frac{\pi}{2} \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx - \frac{1}{2} =$$

$$= \left[-\frac{2}{\pi} \cdot cos\,\frac{\pi}{2}x\right]_0^1 - \frac{1}{2} = \left(-\frac{2}{\pi} \cdot cos\,\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) - \frac{2}{\pi} \cdot cos\,\frac{\pi}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} .$$

$$S_1 = 1 - (S_2 + S_3) = 1 - \frac{2}{\pi} .$$



Pertanto le probabilità richieste sono:

$$P(S_1) = \frac{1 - \frac{2}{\pi}}{1} = 1 - \frac{2}{\pi} \approx 36{,}3\% \qquad P(S_2) = \frac{\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}}{1} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \approx 13{,}7\% \qquad P(S_3) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} = 50{,}0\%$$

Punto 3

Disegniamo i grafici delle funzioni $s(x)^2$ *e* $f(x)^2$ *che rientrano nel quadrato OABC.*
Determiniamo le aree delle tre zone in cui resta diviso il quadrato OABC dalle funzioni $s(x)^2$ *e* $f(x)^2$.

$$\boldsymbol{T_3} = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

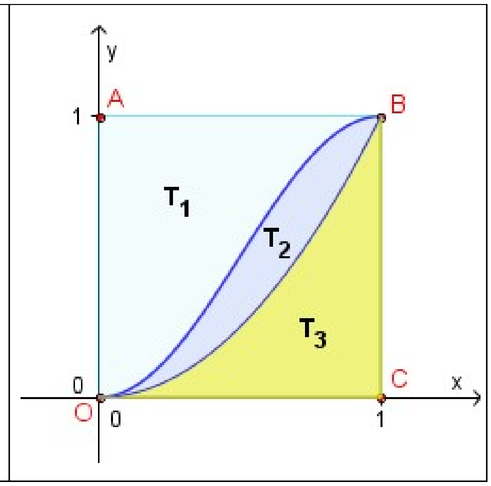
$$\boldsymbol{T_2} = \int_0^1 sen^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx - T_3 = \quad (*)$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left[x - \frac{2}{\pi} \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]\right]_0^1 - \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{2}{\pi} \cdot 1 \cdot 0\right] - \frac{1}{2}\left[0 - \frac{2}{\pi} \cdot 0 \cdot 1\right] - \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$\boldsymbol{T_1} = 1 - T_2 - T_3 = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$



Pertanto le probabilità richieste sono:

$$P(T_1) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} = 50{,}0\% \qquad P(T_2) = \frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\% \qquad P(T_3) = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3} = 33{,}3\%$$

$(*)$ *Calcolo di* $\int sen^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$

Utilizzando la formula di integrazione per parti:

$$\int g(x) \cdot f'(x)\, dx = g(x) \cdot f(x) - \int g'(x) \cdot f(x)\, dx$$

Ponendo:

$$g(x) = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) \qquad f'(x) = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$g'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \qquad f(x) = -\frac{2}{\pi} cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

si ottiene:

$$\int sen^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \int sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx =$$

$$= -sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \frac{2}{\pi} cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \int -\frac{2}{\pi} cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \frac{\pi}{2} cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \int cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \int \left[1 - sen^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right] dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x - \int sen^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx.$$

Pertanto:

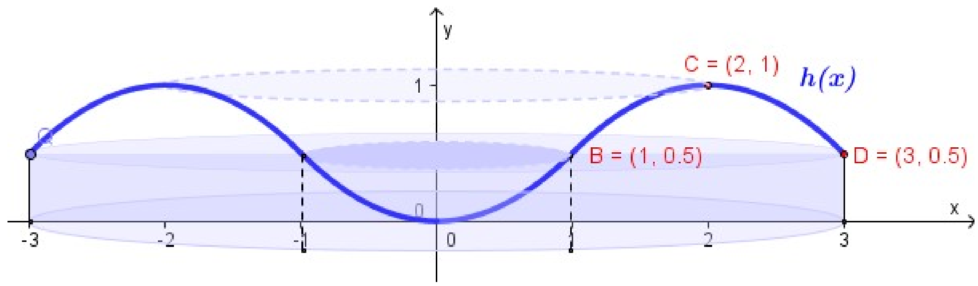
$$\int sen^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = -\frac{2}{\pi} \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x - \int sen^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

Da cui si ricava:

$$2\int sen^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = -\frac{2}{\pi} \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x$$

$$\int sen^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{2}{\pi} \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right].$$

Punto 4 – Soluzione 1



La parabola passante per $O(0\,;0)$ *e* $B\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$ *ha equazione:* $h(x)=\frac{1}{2}x^2$

Infatti: $h(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x=\frac{1}{2}x^2$.

La parabola passante per B, C e D ha equazione: $h(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$

Infatti: $h(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^x f(t)\,dt=h(1)+\int_1^x(2-t)\,dt=$

$=\frac{1}{2}\cdot 1^2+\left[2t-\frac{t^2}{2}\right]_1^x=\frac{1}{2}+\left[2x-\frac{1}{2}x^2-\left(2-\frac{1}{2}\right)\right]=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$.

Oppure

La parabola passante per i punti O e B ha equazione: $y=ax^2$

Imponendo il passaggio per il punto B si ha: $\frac{1}{2}=a\cdot 1^2$; $a=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $y=\frac{1}{2}x^2$

La parabola passante per i punti B, C e D ha equazione: $y=ax^2+bx+c$

$$\begin{cases}-\frac{b}{2a}=2\\ 1=4a+2b+c\\ \frac{1}{2}=a+b+c\end{cases}\qquad \begin{cases}b=-4a\\ 1=4a+2b+c\\ 1=2a+2b+2c\end{cases}\qquad \begin{cases}---\\ 1=4a-8a+c\\ 1=2a-8a+2c\end{cases}\qquad \begin{cases}---\\ 1=-4a+c\\ 1=-6a+2c\end{cases}$$

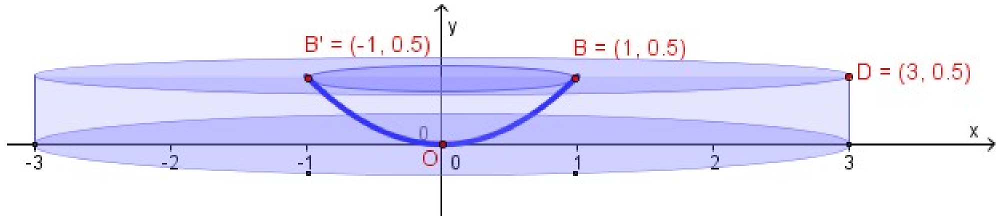
$$\begin{cases}---\\ c=1+4a\\ 1=-6a+2(1+4a)\end{cases}\qquad \begin{cases}---\\ ---\\ 1=-6a+2+8a\end{cases}\qquad \begin{cases}---\\ ---\\ 2a=-1\end{cases}\qquad \begin{cases}---\\ ---\\ a=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}b=-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=2\\ c=1+4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1\\ a=-\frac{1}{2}\end{cases}\qquad\Rightarrow\qquad y=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$$

La funzione $h(x)$ *risulta così definita:*

$$h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2 & 0\le x<1\\ -\frac{1}{2}x^2+2x-1 & 1\le x\le 3\end{cases}$$

Determiniamo il volume della *<u>parte inferiore</u>* $\left(\ 0 \le y \le \frac{1}{2}\right)$ *di questa specie di ciambella.*



Determiniamo la funzione inversa di $y = \frac{1}{2}x^2$

$2y = x^2\,;\qquad x = -\sqrt{2y}$ *arco di parabola* OB'

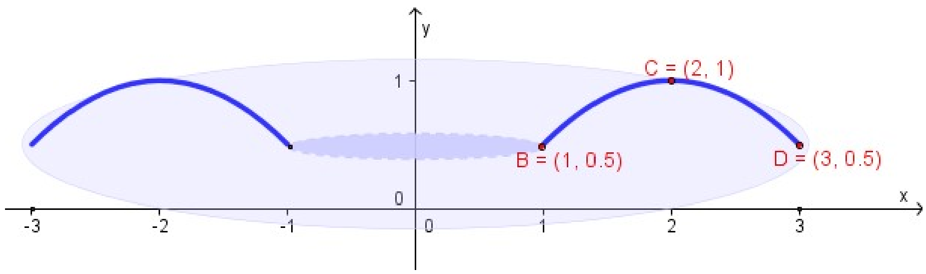
$\qquad\qquad\quad x = +\sqrt{2y}$ *arco di parabola* OB

$$V_{Inferiore} = V_{Cilindro} - V_{Vaschetta} = \pi \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{2} - \pi \cdot \int_0^{0,5} [f^{-1}(y)]^2 \cdot dy =$$

$$= \frac{9}{2}\pi - \pi \cdot \int_0^{0,5} \left[\sqrt{2y}\right]^2 dy = \frac{9}{2}\pi - \pi \cdot \int_0^{0,5} 2y\, dy =$$

$$= \frac{9}{2}\pi - \pi \cdot [y^2]_0^{0,5} = \frac{9}{2}\pi - \pi \cdot \left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{18-1}{4}\pi = \frac{17}{4}\pi\ .$$

Determiniamo il volume della *<u>parte superiore</u>* $\left(\ \frac{1}{2} \le y \le 1\right)$ *di questa specie di ciambella.*



Determiniamo la funzione inversa di $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$

$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 + y = 0\,;\qquad x^2 - 4x + 2 + 2y = 0\,;\qquad \frac{\Delta}{4} = 4 - 2 - 2y = 2 - 2y$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2-2y}\,;\qquad x = 2 - \sqrt{2-2y}$ *arco di parabola* BC

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x = 2 + \sqrt{2-2y}$ *arco di parabola* CD

$$V_{Superiore} = \pi \cdot \int_{0,5}^{1} \left[f_{CD}{}^{-1}(y)\right]^2 \cdot dy - \pi \cdot \int_{0,5}^{1} \left[f_{BC}{}^{-1}(y)\right]^2 \cdot dy =$$

$$= \pi \cdot \int_{0,5}^{1} \left(2 + \sqrt{2-2y}\right)^2 dy - \pi \cdot \int_{0,5}^{1} \left(2 - \sqrt{2-2y}\right)^2 dy =$$

$$= \pi \cdot \int_{0,5}^{1} \left[\left(2 + \sqrt{2-2y}\right)^2 - \left(2 - \sqrt{2-2y}\right)^2\right] dy =$$

$$= \pi \cdot \int_{0,5}^{1} \left[\left(4 + 2 - 2y + 4\sqrt{2-2y}\right) - \left(4 + 2 - 2y - 4\sqrt{2-2y}\right)\right] dy =$$

$$= \pi \cdot \int_{0,5}^{1} \left[6 - 2y + 4\sqrt{2-2y} - 6 + 2y + 4\sqrt{2-2y}\right] dy =$$

$$= \pi \cdot \int_{0,5}^{1} \left[\,8\sqrt{2-2y}\,\right] dy =$$

$$= 8\sqrt{2}\,\pi \cdot \int_{0,5}^{1} \sqrt{1-y}\, dy = \quad (*)$$

$$= \quad 8\sqrt{2}\,\pi\cdot\left[-\frac{2}{3}\sqrt{(1-y)^3}\right]_{0,5}^{1} \quad = \quad 8\sqrt{2}\,\pi\cdot\left[-\frac{2}{3}\sqrt{(1-1)^3}-\left(-\frac{2}{3}\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}\right)\right] =$$

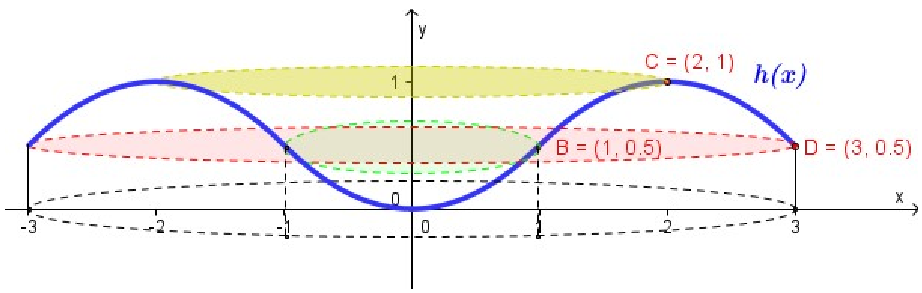
$$= \quad 8\sqrt{2}\,\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad = \quad \frac{8}{3}\,\pi\ .$$

(*) *Calcolo di* $\int\sqrt{1-y}\,dy \quad = \quad -\int -1\cdot(1-y)^{\frac{1}{2}}\,dy \quad = \quad -\frac{(1-y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+k \quad = \quad -\frac{2}{3}\sqrt{(1-y)^3}+k\ .$

Pertanto il volume del solido di rotazione è:

$$V \quad = \quad V_{Inferiore}+V_{Superiore} \quad = \quad \frac{8}{3}\pi+\frac{17}{4}\pi \quad = \quad \frac{32+51}{12}\pi \quad = \quad \frac{83}{12}\pi\ .$$

Punto 4 – Soluzione 2



Utilizzando il metodo dei gusci cilindrici si ha:

$$V \quad = \quad 2\pi\cdot\int_a^b x\cdot[h(x)]\,dx \quad = \quad 2\pi\cdot\int_0^3 x\cdot[h(x)]\,dx \quad = \quad 2\pi\cdot\left[\int_0^1 x\cdot[h_1(x)]\,dx \quad + \quad \int_1^3 x\cdot[h_2(x)]\,dx\right] \quad =$$

$$= \quad 2\pi\cdot\left[\int_0^1 x\cdot\left[\frac{1}{2}x^2\right]dx \quad + \quad \int_1^3 x\cdot\left[-\frac{1}{2}x^2+2x-1\right]dx\right] \quad =$$

$$= \quad 2\pi\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 x^3\,dx \quad + \quad \int_1^3\left[-\frac{1}{2}x^3+2x^2-x\right]dx\right] \quad =$$

$$= \quad 2\pi\cdot\left[\ \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 \quad + \quad \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+2\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^3\ \right] \quad =$$

$$= \quad 2\pi\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} \quad + \quad \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{81}{4}+2\cdot\frac{27}{3}-\frac{9}{2}-\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right]\right\} \quad =$$

$$= \quad 2\pi\cdot\left\{\frac{1}{8} \quad + \quad \left[-\frac{81}{8}+\frac{54}{3}-\frac{9}{2}-\left(-\frac{1}{8}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\right]\right\} \quad =$$

$$= \quad 2\pi\cdot\left\{\frac{1}{8} \quad + \quad \left[-\frac{81}{8}+\frac{54}{3}-\frac{9}{2}-\left(\frac{-3+16-12}{24}\right)\right]\right\} \quad =$$

$$= \quad 2\pi\cdot\left\{\frac{1}{8} \quad + \quad \left[-\frac{81}{8}+\frac{54}{3}-\frac{9}{2}-\frac{1}{24}\right]\right\} \quad =$$

$$= \quad 2\pi\cdot\left\{\frac{1}{8} \quad + \quad \left[\frac{-243+432-108-1}{24}\right]\right\} \quad =$$

$$= \quad 2\pi\cdot\left\{\frac{1}{8}+\frac{80}{24}\right\} \quad =$$

$$= 2\pi\cdot\left\{\frac{3+80}{24}\right\} \quad = \quad \frac{83}{12}\pi\ .$$