ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2017

PROBLEMA 1

Punto 1

La funzione è simmetrica rispetto all'asse y (funzione pari).

Infatti: $f(-x) = \sqrt{2} - \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \sqrt{2} - \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = f(x)$.

La funzione interseca gli assi cartesiani nei punti:

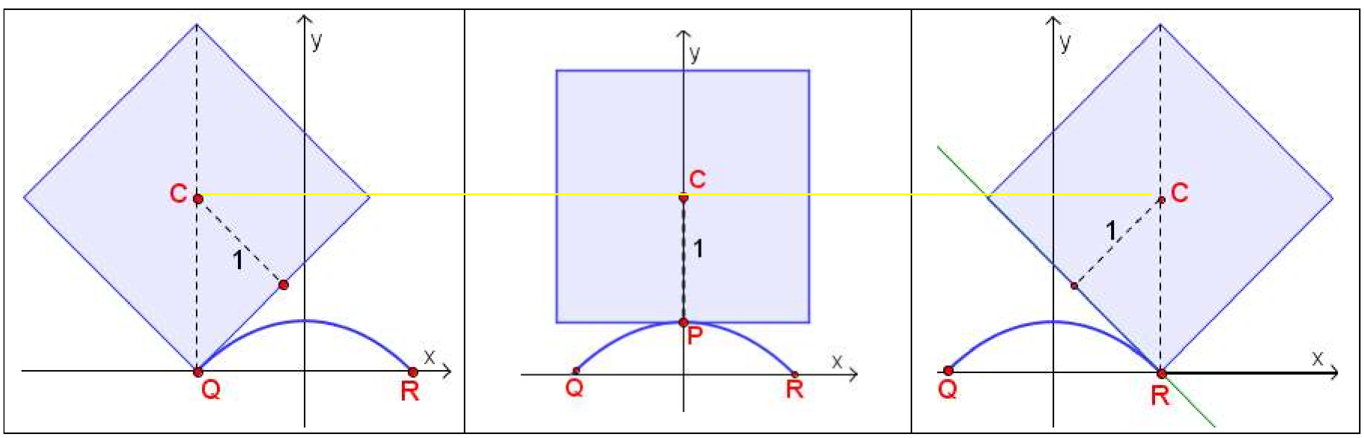
$$\begin{cases} y = \sqrt{2} - \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \sqrt{2} - \dfrac{e^0 + e^0}{2} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \sqrt{2} - \dfrac{1+1}{2} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \sqrt{2} - 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad P(0\,;\,\sqrt{2}-1)$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{2} - \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = \sqrt{2} - \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} e^x + e^{-x} = 2\sqrt{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Ponendo $e^x = z$ *si ha:*

$$z + \frac{1}{z} = 2\sqrt{2}\,; \qquad z^2 + 1 = 2\sqrt{2}\,z\,; \qquad z^2 - 2\sqrt{2}\,z + 1 = 0\,; \qquad \frac{\Delta}{4} = 2 - 1 = 1\,.$$

$$z_{1,2} = \sqrt{2} \mp 1\,; \qquad \begin{matrix} e^x = \sqrt{2} - 1 \\ e^x = \sqrt{2} + 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x = ln(\sqrt{2} - 1) \\ x = ln(\sqrt{2} + 1) \end{matrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix} Q(ln(\sqrt{2} - 1)\,;\,0) \\ R(ln(\sqrt{2} + 1)\,;\,0) \end{matrix}$$



La derivata prima della funzione è:

$$f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$f'(x) = 0\,; \qquad -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0\,; \qquad e^x - e^{-x} = 0\,; \qquad e^x = e^{-x}\,; \qquad x = -x\,; \qquad 2x = 0\,; \qquad x = 0\,.$$

$$f'(x) > 0\,; \qquad -\frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0\,; \qquad e^x - e^{-x} < 0\,; \qquad e^x < e^{-x}\,; \qquad x < -x\,; \qquad 2x < 0\,; \qquad x < 0\,.$$

La funzione è crescente nell'intervallo $[\,ln(\sqrt{2} - 1)\,, 0\,]$.

La funzione è decrescente nell'intervallo $[\,0\,, ln(\sqrt{2} + 1)\,]$.

Per $x = 0$ *la funzione ha un punto di massimo relativo.*

Punto 2.A

La derivata prima è:

$$f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto Q vale:

$$m_{t_Q} = f'\left(ln(\sqrt{2}-1)\right) = -\frac{e^{ln(\sqrt{2}-1)} - e^{-ln(\sqrt{2}-1)}}{2} = -\frac{\sqrt{2}-1-\frac{1}{\sqrt{2}-1}}{2} =$$

$$= -\frac{\frac{2+1-2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}}{2} = -\frac{2-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = -\frac{-(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} = +1 .$$

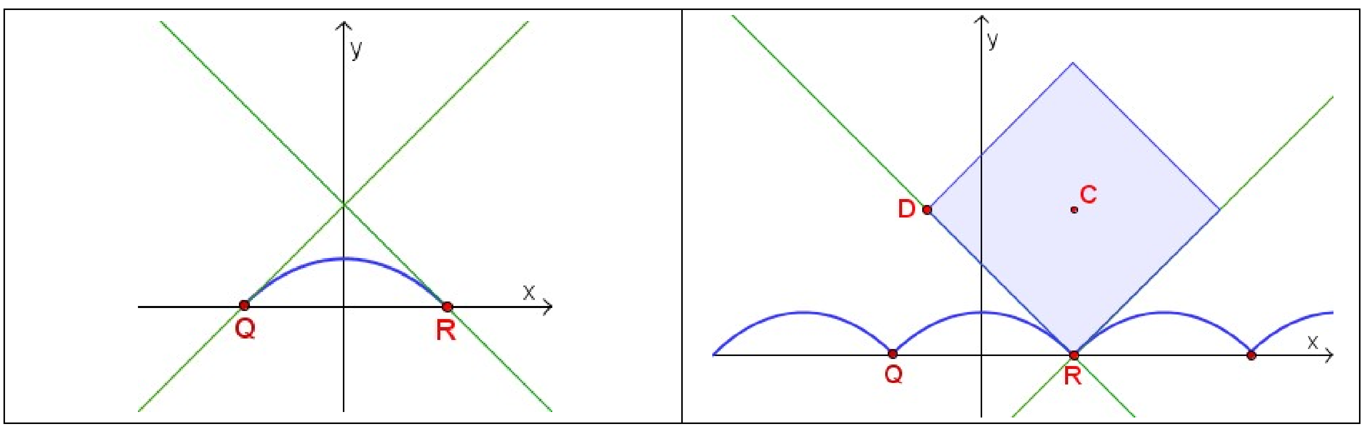
Il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto R vale:

$$m_{t_R} = f'\left(ln(\sqrt{2}+1)\right) = -\frac{e^{ln(\sqrt{2}+1)} - e^{-ln(\sqrt{2}+1)}}{2} = -\frac{\sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}+1}}{2} =$$

$$= -\frac{\frac{2+1+2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}{2} = -\frac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{1}{2} = -1 .$$

Pertanto le tangenti nei punti Q e R sono ortogonali.

Si conclude che a sinistra e a destra dei punti di non derivabilità i tratti del grafico sono ortogonali.



Punto 2.B

La lunghezza di una gobba è:

$$\int_{-a}^{+a} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx \ = \ \int_{ln(\sqrt{2}-1)}^{ln(\sqrt{2}+1)} \sqrt{1+\left[-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]^2}\ dx$$

Calcoliamo l'integrale per sostituzione:

Ponendo $e^x = t$ *si ha* $x = ln\, t$

Calcoliamo il differenziale: $dx = \frac{1}{t} dt$.

Determiniamo i valori della variabile t negli estremi di integrazione:

Per $x = ln\left(\sqrt{2}-1\right) \quad \rightarrow \quad x = ln\, t\,; \quad ln\left(\sqrt{2}-1\right) = ln\, t\,; \quad t = \sqrt{2}-1\,.$

Per $x = ln\left(\sqrt{2}+1\right) \quad \rightarrow \quad x = ln\, t\,; \quad ln\left(\sqrt{2}+1\right) = ln\, t\,; \quad t = \sqrt{2}+1\,.$

Effettuando le sostituzioni si ottiene:

$$\int_{ln(\sqrt{2}-1)}^{ln(\sqrt{2}+1)} \sqrt{1+\left[-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]^2}\ dx \ = \ \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \sqrt{1+\left[-\frac{t-\frac{1}{t}}{2}\right]^2} \cdot \frac{1}{t} dt \ =$$

$$= \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \sqrt{1+\left[-\frac{t^2-1}{2t}\right]^2} \cdot \frac{1}{t} dt \ = \ \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \sqrt{1+\frac{(t^2-1)^2}{4t^2}} \cdot \frac{1}{t} dt \ =$$

$$= \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \sqrt{\frac{4t^2+t^4+1-2t^2}{4t^2}} \cdot \frac{1}{t} dt \ = \ \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \sqrt{\frac{2t^2+t^4+1}{4t^2}} \cdot \frac{1}{t} dt \ =$$

$$= \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \sqrt{\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}} \cdot \frac{1}{t} dt \ = \ \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{t^2+1}{2t} \cdot \frac{1}{t} dt \ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{t^2+1}{t^2} \cdot dt \ = \ \frac{1}{2} \cdot \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \left[1+\frac{1}{t^2}\right] \cdot dt \ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} [1+t^{-2}] \cdot dt \ = \ \frac{1}{2} \cdot \left[t+\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\right]_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot [t-t^{-1}]_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \ = \ \frac{1}{2} \cdot \left[t-\frac{1}{t}\right]_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)-\left(\sqrt{2}-1-\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)\right] \ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\sqrt{2}+1+\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right] \ =$$

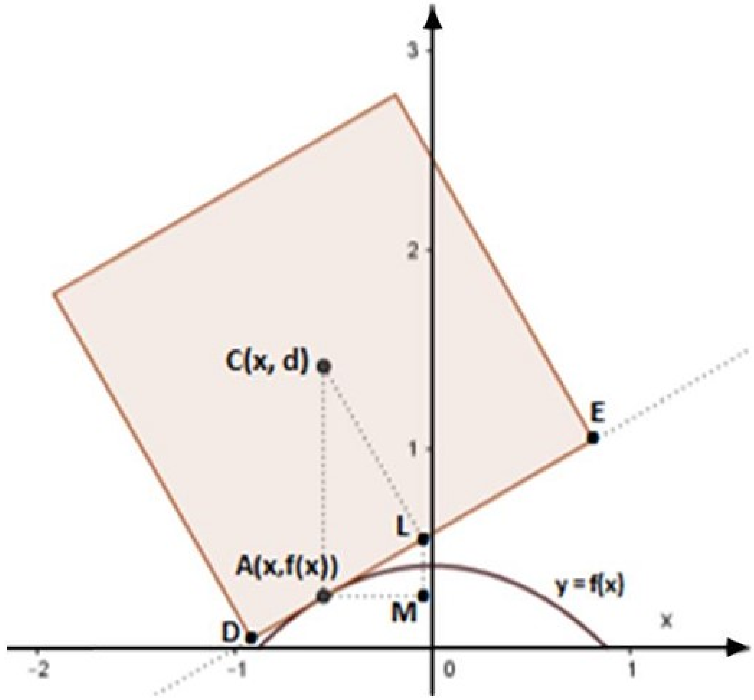
$$= \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}+2\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}+2\right] \ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2}{2-1}+2\right] \ = \ \frac{1}{2} \cdot [2+2] \ = \ 2\ .$$

La lunghezza della gobba è uguale alla lunghezza del lato della ruota quadrata.

Punto 3.A



Dalla similitudine dei triangoli ACL e ALM si ha: $\dfrac{\overline{AL}}{\overline{CL}} = \dfrac{\overline{LM}}{\overline{AM}}$

Ma $\dfrac{\overline{LM}}{\overline{AM}} = f'(x) = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Pertanto $\dfrac{\overline{AL}}{\overline{CL}} = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Ma $\overline{CL} = 1$

Quindi $\overline{AL} = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ACL si ottiene:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AL}^2 + \overline{CL}^2} = \sqrt{\left(-\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)^2}{4} + 1} = \sqrt{\frac{\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x}\right)^2}{4} + 1} =$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{(e^{2x} - 1)^2}{e^{2x}}}{4} + 1} = \sqrt{\frac{\frac{e^{4x} + 1 - 2e^{2x}}{e^{2x}}}{4} + 1} = \sqrt{\frac{e^{4x} + 1 - 2e^{2x}}{4e^{2x}} + 1} =$$

$$= \sqrt{\frac{e^{4x} + 1 - 2e^{2x} + 4e^{2x}}{4e^{2x}}} = \sqrt{\frac{e^{4x} + 1 + 2e^{2x}}{4e^{2x}}} = \sqrt{\frac{(e^{2x} + 1)^2}{4e^{2x}}} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} .$$

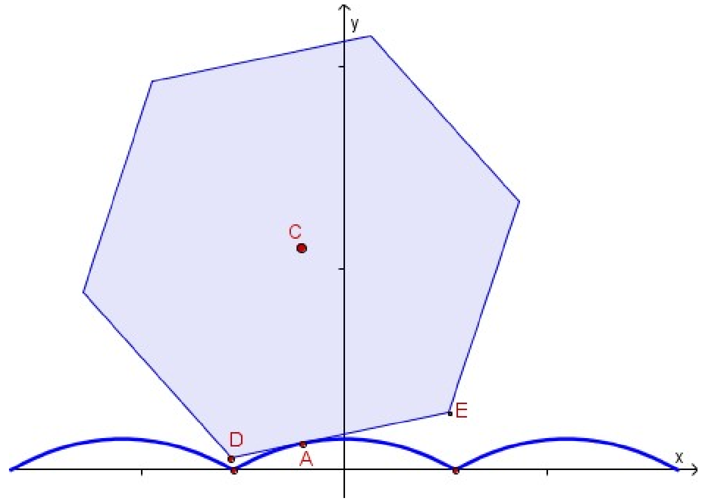
Pertanto il valore dell'ordina d del centro della ruota vale:

$$d = \overline{AC} + f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} + \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} =$$

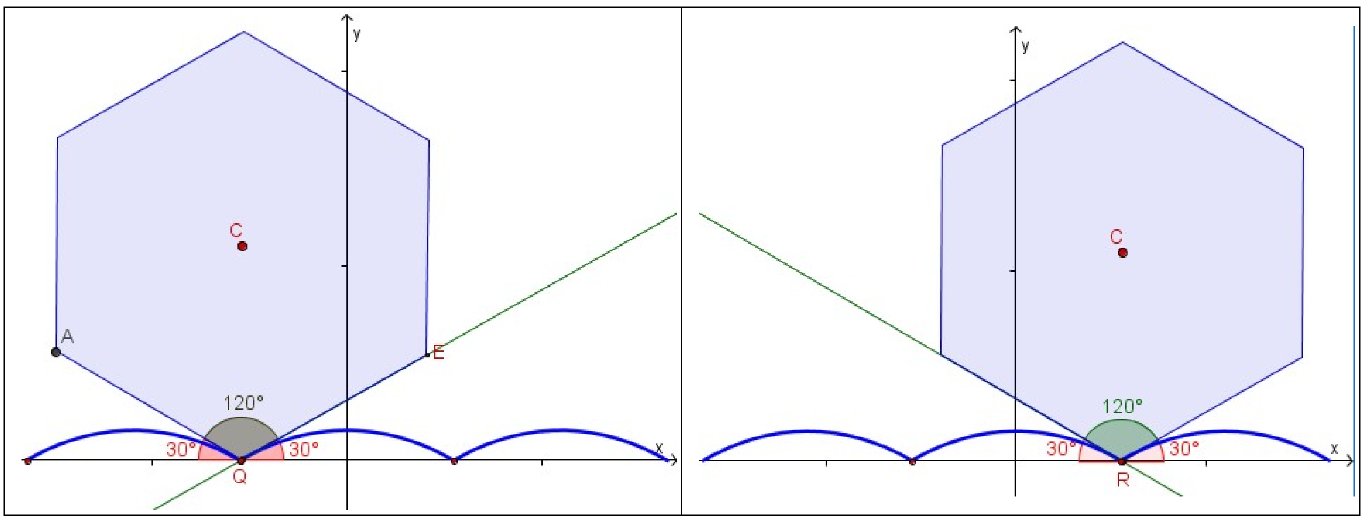
$$= \sqrt{2} + \frac{e^{2x} + 1 - e^x \cdot (e^x - e^{-x})}{2e^x} = \sqrt{2} + \frac{e^{2x} + 1 - e^{2x} - 1}{2e^x} = \sqrt{2} .$$

Punto 4

Il poligono in questione è un esagono regolare.



Infatti a sinistra e a destra dei punti di non derivabilità i tratti del grafico formano angoli di 120°.



A tal proposito la derivata prima è:

$$f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto Q vale:

$$m_{t_Q} = f'\left(-\frac{\ln 3}{2}\right) = -\frac{e^{-\frac{\ln 3}{2}} - e^{\frac{\ln 3}{2}}}{2} = -\frac{e^{-\ln\sqrt{3}} - e^{\ln\sqrt{3}}}{2} = -\frac{e^{\ln\frac{1}{\sqrt{3}}} - e^{\ln\sqrt{3}}}{2} =$$

$$= -\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{2} = -\frac{\frac{1-3}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \; .$$

Il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto R vale:

$$m_{t_R} = f'\left(\frac{\ln 3}{2}\right) = -\frac{e^{\frac{\ln 3}{2}} - e^{-\frac{\ln 3}{2}}}{2} = -\frac{e^{\ln\sqrt{3}} - e^{-\ln\sqrt{3}}}{2} = -\frac{e^{\ln\sqrt{3}} - e^{\ln\frac{1}{\sqrt{3}}}}{2} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = -\frac{\frac{3-1}{\sqrt{3}}}{2} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \; .$$

Ricordando che: $tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ *e* $tg\ 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

si conclude che a sinistra e a destra dei punti di non derivabilità i tratti del grafico formano angoli di 120°.

La lunghezza di una gobba è:

$$\int_{-a}^{+a} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx \ = \ \int_{-\frac{\ln 3}{2}}^{\frac{\ln 3}{2}} \sqrt{1+\left[-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]^2}\ dx \ = \ \int_{-\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{3}} \sqrt{1+\left[-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]^2}\ dx$$

Calcoliamo l'integrale per sostituzione:

Ponendo $e^x = t$ *si ha* $x = \ln t$

Calcoliamo il differenziale: $dx = \frac{1}{t}dt$.

Determiniamo i valori della variabile t negli estremi di integrazione:

Per $x = -\ln\sqrt{3} = \ln\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\rightarrow$ $x = \ln t$; $\ln\frac{1}{\sqrt{3}} = \ln t$; $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Per $x = \ln\sqrt{3}$ $\rightarrow$ $x = \ln t$; $\ln\sqrt{3} = \ln t$; $t = \sqrt{3}$.

Effettuando le sostituzioni si ottiene:

$$\int_{-\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{3}} \sqrt{1+\left[-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]^2}\ dx \ = \ \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1+\left[-\frac{t-\frac{1}{t}}{2}\right]^2} \cdot \frac{1}{t}dt \ =$$

$$= \ \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1+\left[-\frac{t^2-1}{2t}\right]^2} \cdot \frac{1}{t}dt \ = \ \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1+\frac{(t^2-1)^2}{4t^2}} \cdot \frac{1}{t}dt \ =$$

$$= \ \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{4t^2+t^4+1-2t^2}{4t^2}} \cdot \frac{1}{t}dt \ = \ \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2t^2+t^4+1}{4t^2}} \cdot \frac{1}{t}dt \ =$$

$$= \ \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}} \cdot \frac{1}{t}dt \ = \ \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{t^2+1}{2t} \cdot \frac{1}{t}dt \ =$$

$$= \ \frac{1}{2} \cdot \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{t^2+1}{t^2} \cdot dt \ = \ \frac{1}{2} \cdot \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \left[1+\frac{1}{t^2}\right] \cdot dt \ =$$

$$= \ \frac{1}{2} \cdot \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} [1+t^{-2}] \cdot dt \ = \ \frac{1}{2} \cdot \left[t+\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}$$

$$= \ \frac{1}{2} \cdot [t-t^{-1}]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \ = \ \frac{1}{2} \cdot \left[t-\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\right)\right] \ =$$

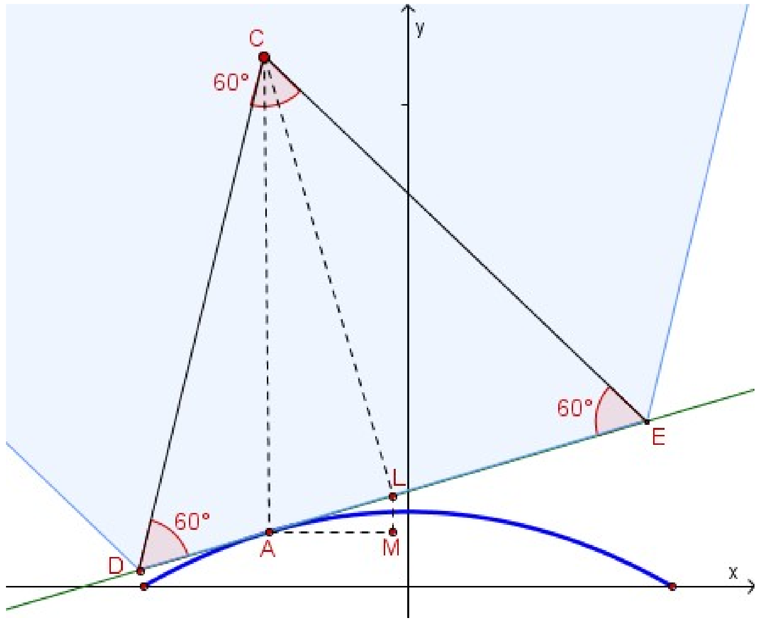
$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right] \ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{3-1-1+3}{\sqrt{3}}\right] \ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{4}{\sqrt{3}}\right] \ = \frac{2}{\sqrt{3}} \ .$$

La lunghezza della gobba deve essere uguale alla lunghezza del lato della ruota esagonale.

Affinchè si abbia la sensazione di un rotolamento di una ruota circolare su una superficie piana, occorre che il valore dell'ordina del centro della ruota sia costante durante il moto.



Dalla similitudine dei triangoli ACL e ALM si ha: $\dfrac{\overline{AL}}{\overline{CL}} = \dfrac{\overline{LM}}{\overline{AM}}$

ma $\dfrac{\overline{LM}}{\overline{AM}} = f'(x) = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Pertanto $\dfrac{\overline{AL}}{\overline{CL}} = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Essendo $\overline{CE} = \overline{DE} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Si ha $\overline{CL} = \overline{CE} \cdot sen\ 60° = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1$

Quindi $\overline{AL} = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ACL si ottiene:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AL}^2 + \overline{CL}^2} = \sqrt{\left(-\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\left(-\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\left(-\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 + 1} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)^2}{4} + 1} = \sqrt{\frac{\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x}\right)^2}{4} + 1} = \sqrt{\frac{\frac{(e^{2x} - 1)^2}{e^{2x}}}{4} + 1} = \sqrt{\frac{\frac{e^{4x} + 1 - 2e^{2x}}{e^{2x}}}{4} + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{e^{4x} + 1 - 2e^{2x}}{4e^{2x}} + 1} = \sqrt{\frac{e^{4x} + 1 - 2e^{2x} + 4e^{2x}}{4e^{2x}}} = \sqrt{\frac{e^{4x} + 1 + 2e^{2x}}{4e^{2x}}} = \sqrt{\frac{(e^{2x} + 1)^2}{4e^{2x}}} =$$

$$= \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}.$$

Pertanto il valore dell'ordina d del centro della ruota vale:

$$d = \overline{AC} + f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{e^{2x} + 1 - e^x \cdot (e^x - e^{-x})}{2e^x} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{e^{2x} + 1 - e^{2x} - 1}{2e^x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\ .$$