ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2015

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 SCIENTIFICO
LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

Problema 1

Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate all'estero, un canone fisso di 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con $f(x)$ la spesa totale nel mese e con $g(x)$ il costo medio al minuto:

1. individua l'espressione analitica delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e rappresentale graficamente; verifica che la funzione $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.

2. Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che:

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}$$

Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse:

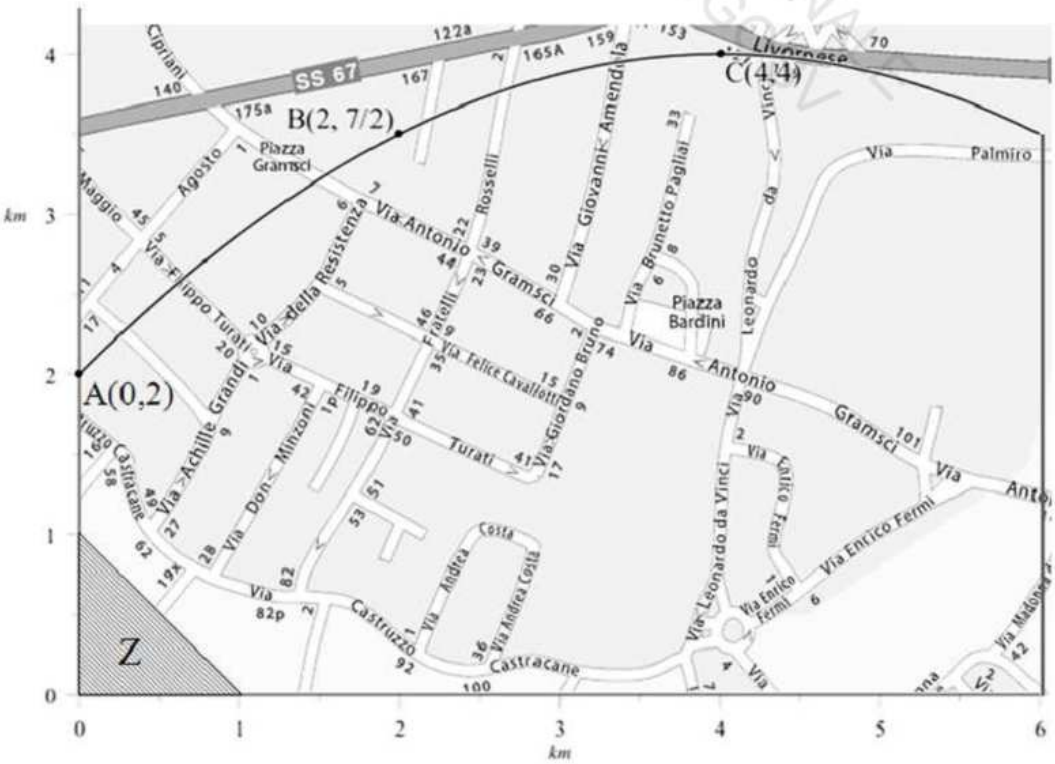


Figura 1

La zona è delimitata dalla curva passante per i punti A, B e C, dagli assi x e y, e dalla retta di equazione $x = 6$; la porzione etichettata con la "Z", rappresenta un'area non coperta dal segnale telefonico dell'operatore in questione.

3. Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti A, B e C. Sul sito web dell'operatore compare la seguente affermazione: "*nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio*"; verifica se effettivamente è così.

L'operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti.

4. Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $g(x)$ e della sua derivata e spiegane il significato nella situazione concreta.

Punto 1

Seguendo le indicazioni della traccia: "indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese" si ha:

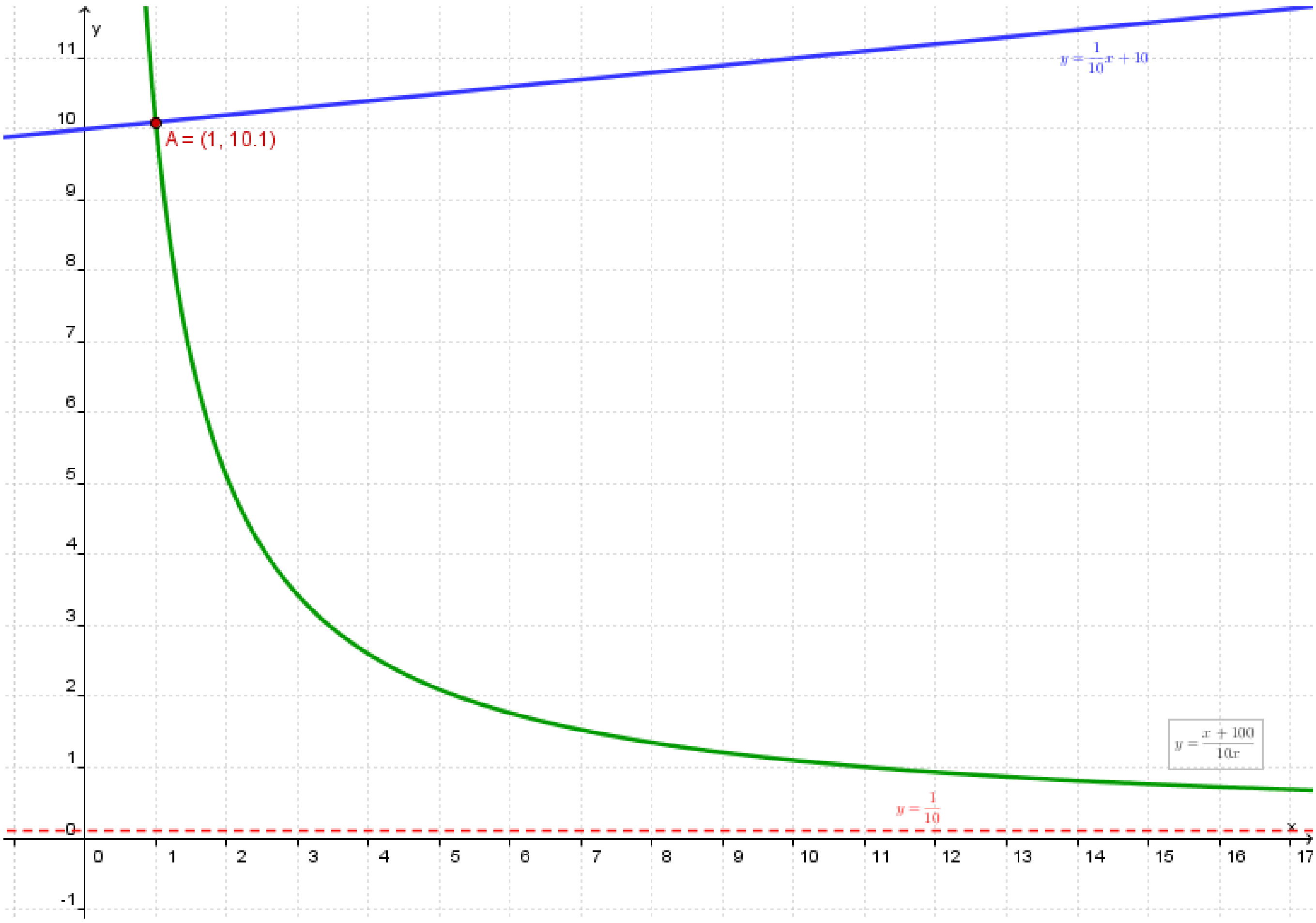
La spesa totale nel mese $f(x) = \frac{10}{100}x + 10$ *cioè* $f(x) = \frac{1}{10}x + 10$ *con* $0 \le x \le 43200$ $43200 = 30 \cdot 24 \cdot 60$

Il costo medio al minuto $g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{10} + \frac{10}{x}$ *ovvero* $g(x) = \frac{x+100}{10x}$ *con* $0 < x \le 43200$.

$f(x) = \frac{1}{10}x + 10$ *è una funzione lineare crescente (semiretta), nel quale l'ordinata all'origine 10 indica il canone fisso mensile mentre il coefficiente angolare* $m = \frac{1}{10}$ *indica il costo al minuto della conversazione.*

La spesa mensile è minima se non vengono effettuate telefonate (10 €); il costo aumenta all'aumentare del numero dei minuti di conversazione fino a raggiungere il valore massimo per 43200 minuti di conversazione.

$g(x) = \frac{x+100}{10x}$ *è una funzione omografica avente per asintoti:* $x = 0$ $(A.\ Verticale)$ *e* $y = \frac{1}{10}$ $(A.\ Orizzontale)$



In generale una funzione omografica, non ha massimi ne minimi relativi, ma nel nostro problema, considerando il dominio $D =]0,\ 43200]$ *della funzione* $g(x)$, *essa ammette un minimo assoluto (e quindi anche relativo) nell'estremo destro del suo dominio.*

La decrescenza della funzione $g(x)$ *indica che il costo medio al minuto diminuisce all'aumentare dei minuti di conversazione effettuati e raggiunge il valore minimo* $g(x) \cong 0{,}1002315$ *quando l'utente conversa per tutti i 43200 minuti del mese.*

Le due funzioni $f(x)$ *e* $g(x)$ *si intersecano nel punto di ascissa* $x = 1$.

Punto 2

Nel punto 2 è richiesto di calcolare il valore x_1 *che indica il numero di minuti di conversazione che dimezzano il costo medio* $g(x_0)$.

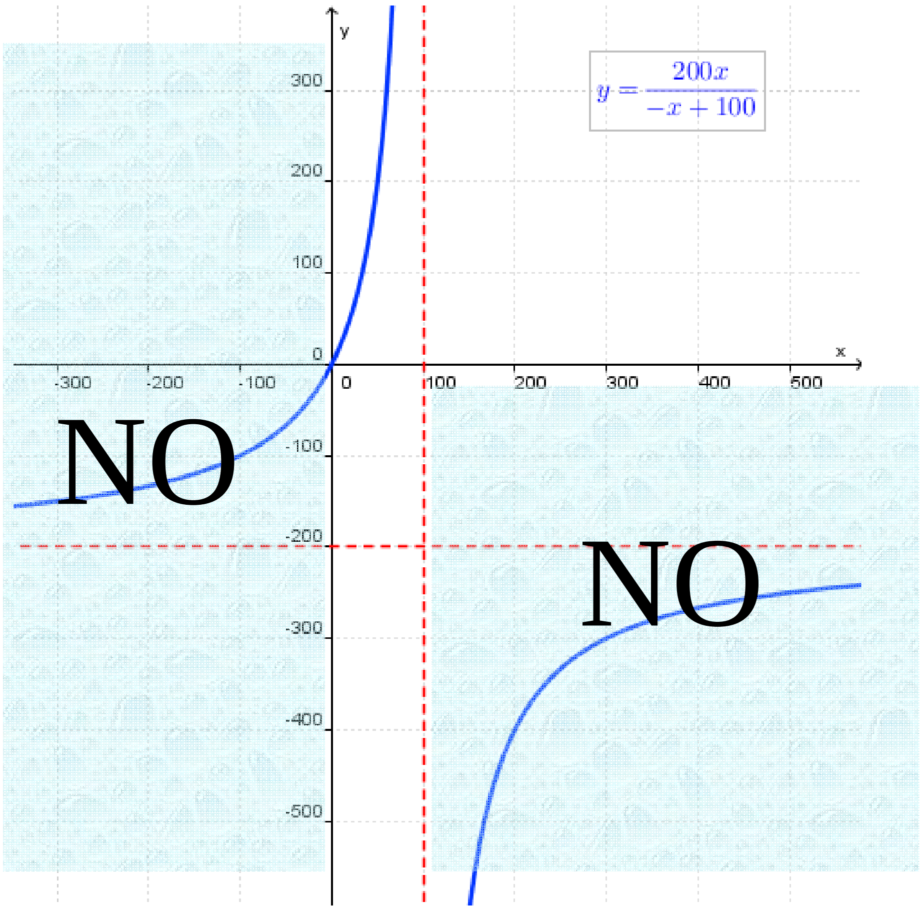
$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2} \ ; \qquad \frac{x_1 + 100}{10x_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_0 + 100}{10x_0} \ ; \qquad \frac{x_1 + 100}{10x_1} = \frac{x_0 + 100}{20x_0} \ ;$$

$$20x_0 \cdot (x_1 + 100) = 10x_1 \cdot (x_0 + 100) \ ; \qquad . \ . \ . \qquad x_1 = \frac{200x_0}{-x_0 + 100} \ .$$

Pertanto la funzione richiesta, che esprime la dipendenza di x_1 *da* x_0 *è:* $$h(x_0) = \frac{200\,x_0}{-x_0 + 100}$$

Trattasi di una funzione omografica avente per asintoti: $x_0 = 100$ $(A.\ Verticale)$ $\quad x_1 = -200$ $(A.\ Orizzontale)$

Nel nostro problema tale funzione deve riferirsi al dominio $D =]0,\ 43200]$.



Essendo sia x_0 *sia* x_1 *minuti di conversazione occorre trascurare il ramo negativo* $(100 < x \le 43200)$.

L'asintoto verticale $x_0 = 100$ *rappresenta il numero di minuti di conversazione che hanno come costo medio* $g(100) = \frac{100+100}{10 \cdot 100} = \frac{2}{10}$ *il doppio del costo medio asintotico* $g(x_0) = \frac{1}{10}$.

Punto 3

La funzione polinomiale di secondo grado richiesta è del tipo: $y = ax^2 + bx + c$ *(parabola).*
Imponendo il passaggio per i tre punti A, B , C si ha:

$$\begin{cases} 2 = c \\ \frac{7}{2} = 4a + 2b + c \\ 4 = 16a + 4b + c \end{cases} \quad \begin{cases} c = 2 \\ \frac{7}{2} = 4a + 2b + 2 \\ 4 = 16a + 4b + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 2 \\ 7 = 8a + 4b + 4 \\ 4 = 16a + 4b + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 2 \\ 8a + 4b = 3 \\ 16a + 4b = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 2 \\ \\ 8a = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 2 \\ \\ a = -\frac{1}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} c = 2 \\ -1 + 4b = 3 \\ a = -\frac{1}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} c = 2 \\ b = 1 \\ a = -\frac{1}{8} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{8}x^2 + x + 2$$

L'area coperta dal segnale è:

$$S_C = \int_0^6 \left[-\frac{1}{8}x^2 + x + 2\right] dx - \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 = \left[-\frac{1}{8}\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^6 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}\frac{216}{3} + \frac{36}{2} + 2\cdot 6 - \frac{1}{2} =$$

$$= -9 + 18 + 12 - \frac{1}{2} = 20{,}5\ .$$

La percentuale della zona coperta dal segnale è $\frac{S_C}{S} = 20{,}5 : 21 \approx 0{,}976 = 97{,}6\%$ *maggiore di quanto dichiarato sul sito.*

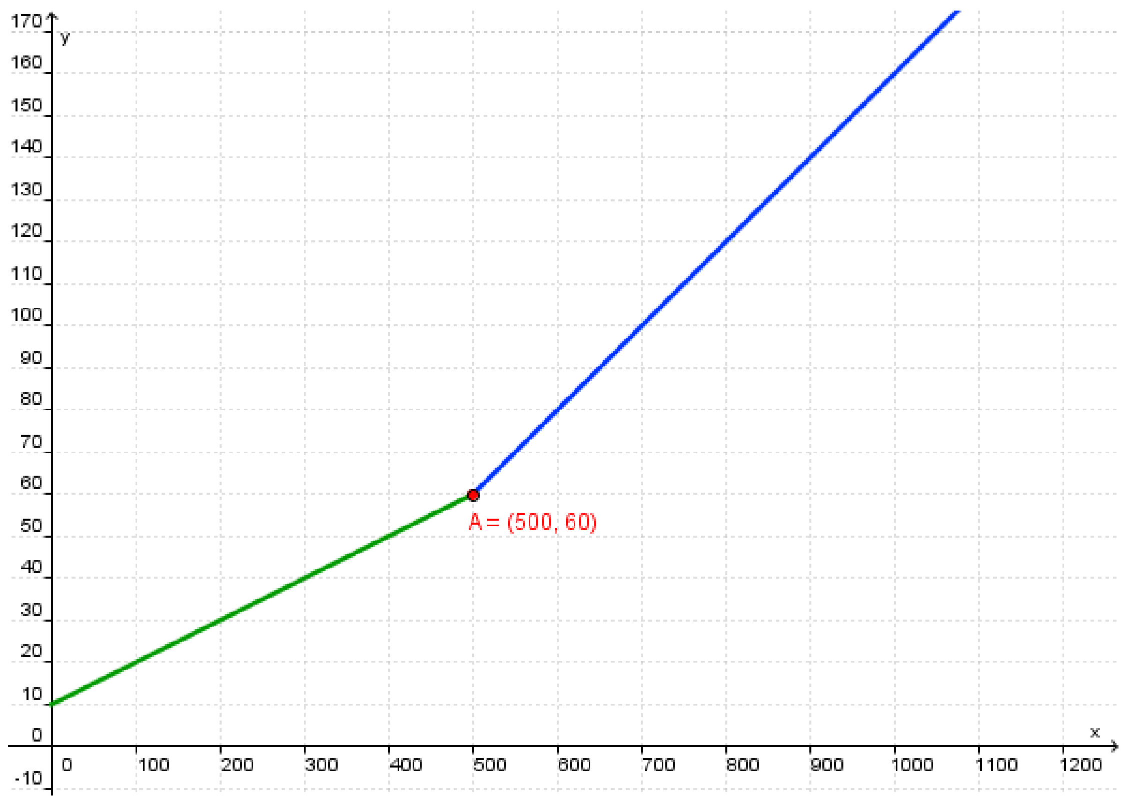
Punto 4

La funzione costo con il nuovo piano tariffario diventa una funzione definita a tratti:

$$z\,(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x + 10 & se \quad 0 \le x \le 500 \\ \frac{1}{10}x + 10 + \frac{x-500}{10} & se \quad 500 < x \le 43200 \end{cases}$$

cioè:

$$z\,(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x + 10 & se \quad 0 \le x \le 500 \\ \frac{1}{5}x - 40 & se \quad 500 < x \le 43200 \end{cases}$$



La nuova funzione costo $z(x)$ *è continua in tutto il suo dominio, compreso in* $x = 500$. *Infatti:*

$$\lim_{x \to 500^-} z(x) = \lim_{x \to 500^-} \left(\frac{1}{10}x + 10\right) = 60 \qquad \lim_{x \to 500^+} z(x) = \lim_{x \to 500^+} \left(\frac{1}{5}x - 40\right) = 60$$

e $z(500) = 60$.

La nuova funzione costo $z(x)$ *non è invece derivabile in* $x = 500$ *, poiché, come si evince dal grafico, c'è un cambio di pendenza della semiretta destra rispetto a quella sinistra* $\left(m_1 = \frac{1}{10} \quad m_2 = \frac{1}{5}\right)$.

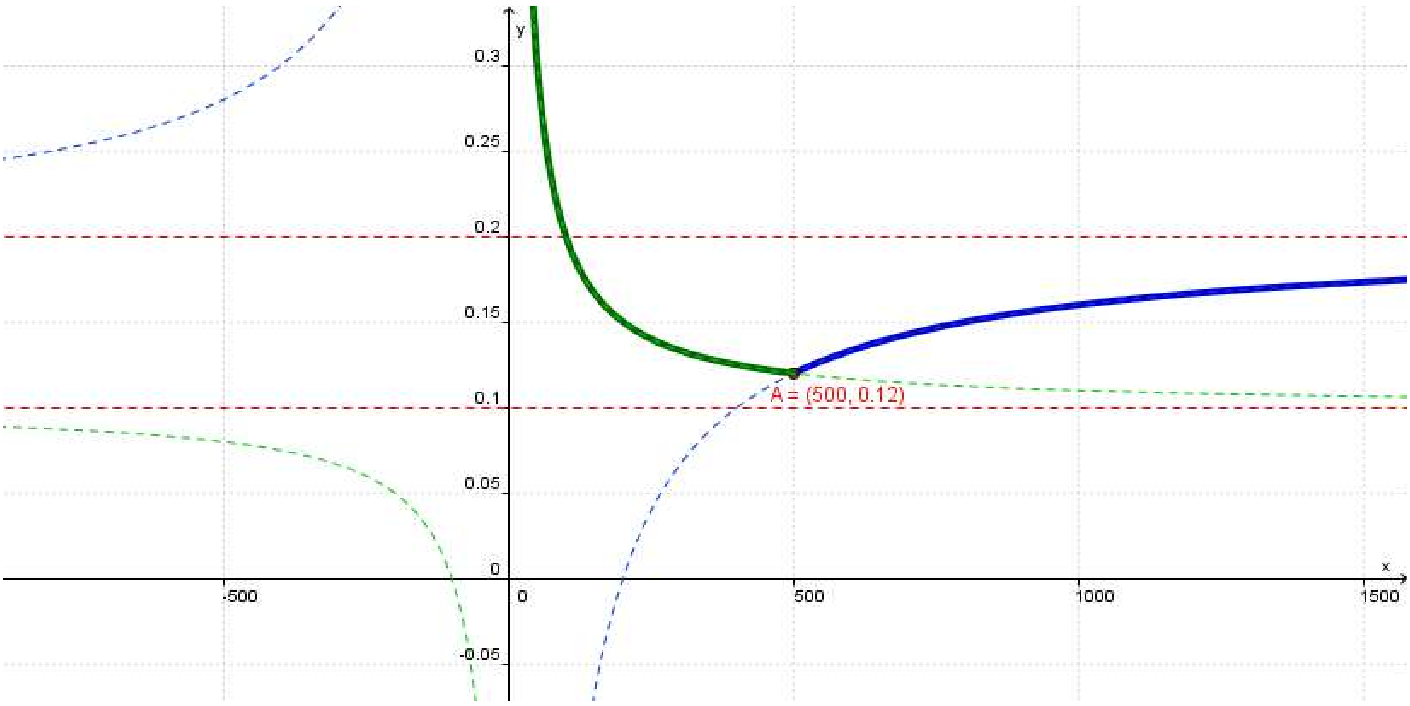
La funzione ha un minimo assoluto per $x = 0$ *e vale* $f(0) = 10$ *ovvero 10€*.

La funzione "costo medio al minuto" con il nuovo piano tariffario è anch'essa una funzione definita a tratti:

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x+100}{10x} & se \quad 0 \le x \le 500 \\ \dfrac{x-200}{5x} & se \quad 500 < x \le 43200 \end{cases}$$

Nell'intervallo $0 < x \le 500$ *la funzione* $G_1(x) = \frac{x+100}{10x}$ *è un ramo di funzione omografica avente per asintoti le rette:* $x = 0$ $(A.\ Verticale)$ *e* $y = \frac{1}{10}$ $(A.\ Orizzontale)$.

Nell'intervallo $500 < x \le 43200$ *la funzione* $G_2(x) = \frac{x-200}{5x}$ *è un ramo di funzione omografica avente per asintoti le rette:* $x = 0$ $(A.\ Verticale)$ *e* $y = \frac{1}{5}$ $(A.\ Orizzontale)$.



La nuova funzione "costo medio al minuto" $G(x)$ *è continua in tutto il suo dominio, compreso in* $x = 500$.

La funzione $G(x)$ *non è invece derivabile in* $x = 500$ *, poiché, come si evince dal grafico, c'è un cambio di concavità del ramo destro della funzione omografica* $G_2(x)$ *rispetto al ramo sinistro della funzione omografica* $G_1(x)$.

La funzione ha un minimo assoluto per $x = 500$ *e vale* $G(500) = \frac{500+100}{10 \cdot 500} = 0{,}12$.

La funzione non ha invece massimo assoluto ne relativo.