ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

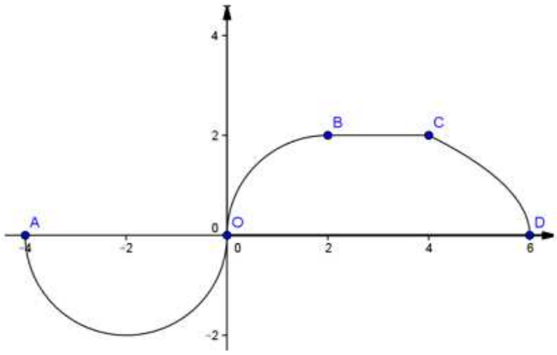
Sessione Ordinaria 2014

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Problema 1

PROBLEMA 1

Sia $g(x)$ una funzione continua sull'intervallo chiuso $[-4,6]$. Il grafico di $g(x)$, disegnato a lato, passa per i punti $\mathrm{A}(-4;0)$, $\mathrm{O}(0;0)$, $\mathrm{B}(2;2)$, $\mathrm{C}(4;2)$, $\mathrm{D}(6;0)$ e consiste della semicirconferenza di diametro AO, dell'arco, quarto di circonferenza, di estremi O e B, del segmento BC e dell'arco CD di una parabola avente per asse di simmetria l'asse x.



1. Si dica, giustificando la risposta, se $g(x)$ è derivabile nei punti A, O, B, C, D.
2. Posto $f(x)=\int_{-4}^{x} g(t)\,dt$, si calcolino: $f(-4)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$.
3. Per quali valori di $x\in[-4,6]$, $f(x)$ è positiva, negativa o nulla? E per quali x è positiva, negativa o nulla la funzione derivata seconda $f''(x)$?
4. La funzione $f(x)$ presenta un massimo e un minimo assoluti? Qual è l'andamento di $f(x)$.

Punto 1

L'espressione analitica della funzione $g(x)$ *è* $g(x)=\begin{cases} -\sqrt{-x^2-4x} & se\ \ -4\le x\le 0 \\ +\sqrt{-x^2+4x} & se\ \ 0<x\le 2 \\ 2 & se\ \ 2<x\le 4 \\ \sqrt{-2x+12} & se\ \ 4<x\le 6 \end{cases}$

Infatti:

La circonferenza di diametro AO ha equazione:

$$(x+2)^2+(y-0)^2=2^2\ ; \qquad x^2+4+4x+y^2=4\ ; \qquad y=\mp\sqrt{-x^2-4x}=\begin{cases} +\sqrt{-x^2-4x} & se\ \ y\ge 0 \\ -\sqrt{-x^2-4x} & se\ \ y<0 \end{cases}$$

Pertanto, la semicirconferenza di diametro AO, poiché si trova nel semipiano $y\le 0$ *, ha equazione:* $y=-\sqrt{-x^2-4x}$.

La circonferenza passante per O e B e centro in $(2;0)$ *ha equazione:*

$$(x-2)^2+(y-0)^2=2^2\ ; \qquad x^2+4-4x+y^2=4\ ; \qquad y=\mp\sqrt{-x^2+4x}=\begin{cases} +\sqrt{-x^2+4x} & se\ \ y\ge 0 \\ -\sqrt{-x^2+4x} & se\ \ y<0 \end{cases}$$

Pertanto, il quarto di circonferenza passante per O e B e centro in $(2;0)$ *ha equazione:* $y=+\sqrt{-x^2+4x}$.

Il segmento BC appartiene alla retta di equazione: $y=2$.

Infine, la parabola con asse di simmetria l'asse x ha equazione del tipo $x\ =\ ay^2+by\ +\ c$

Sfruttando le informazioni che si hanno su di essa si ottiene:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=0 \\ 6=a\cdot 0^2+b\cdot 0+\ c \\ 4=a\cdot 2^2+b\cdot 2+\ c \end{cases} \qquad \begin{cases} b=0 \\ c=6 \\ 4=4a+2b+\ c \end{cases} \qquad \begin{cases} b=0 \\ c=6 \\ 4=4a+6 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=0 \\ c=6 \\ a=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{2}y^2+6$$

Da cui si ricava l'espressione: $y^2=-2x+12$; $\qquad y=\mp\sqrt{-2x+12}=\begin{cases} +\sqrt{-2x+12} & se\ \ y\ge 0 \\ -\sqrt{-2x+12} & se\ \ y<0 \end{cases}$

Pertanto, l'arco di parabola CD *ha equazione:* $y=+\sqrt{-2x+12}$.

La funzione derivata prima è:

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}} & se \quad -4 < x < 0 \\ \frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x}} & se \quad 0 < x < 2 \\ 0 & se \quad 2 < x < 4 \\ -\frac{1}{\sqrt{-2x+12}} & se \quad 4 < x < 6 \end{cases}$$

Infatti:

$D\left(-\sqrt{-x^2-4x}\right) = -\frac{-2x-4}{2\sqrt{-x^2-4x}} = \frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}}$ $\qquad D\left(\sqrt{-x^2+4x}\right) = \frac{-2x+4}{2\sqrt{-x^2+4x}} = \frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x}}$

$D\left(\sqrt{-2x+12}\right) = \frac{-2}{2\sqrt{-2x+12}} = \frac{-1}{\sqrt{-2x+12}}$

La funzione $g(x)$ *non è derivabile nel punto A. Infatti:* $\lim_{x\to -4^+} \frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}} = -\infty$

La funzione $g(x)$ *non è derivabile nel punto O. Flesso a tangente verticale. Infatti:* $\lim_{x\to 0^-} \frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}} = +\infty$ *e* $\lim_{x\to 0^+} \frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x}} = +\infty$

La funzione $g(x)$ *è derivabile nel punto B. Infatti:* $\lim_{x\to 2^-} \frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x}} = 0$ *e* $\lim_{x\to 2^+} 0 = 0$

La funzione $g(x)$ *non è derivabile nel punto C. Punto angoloso. Infatti:* $\lim_{x\to 4^-} 0 = 0$ *e* $\lim_{x\to 4^+} -\frac{1}{\sqrt{-2x+12}} = -\frac{1}{2}$

La funzione $g(x)$ *non è derivabile nel punto D. Infatti:* $\lim_{x\to 6^-} -\frac{1}{\sqrt{-2x+12}} = -\infty$

A questo quesito si poteva rispondere anche per via geometrica. Infatti:

- *Nei punti A e O la funzione non è derivabile perché le tangenti alla curva in questi punti sono perpendicolari ai raggi passanti per A e O, e quindi verticali.*
- *Nel punto D la funzione non è derivabile perché la tangente alla parabola nel vertice D è perpendicolare all'asse (x).*
- *Nel punto B la funzione è derivabile perché: (a sinistra di B) la tangente all'arco di circonferenza EB è perpendicolare al raggio passante per B, e quindi orizzontale* $m_{t^-} = 0$*; (a destra di B) la tangente al segmento orizzontale BC è la retta orizzontale BC, e quindi* $m_{t^+} = 0$.
- *Nel punto C la funzione non è derivabile perché: a sinistra di C,* $m_{t^-} = 0$, *mentre a destra* $m_{t^+} = -\frac{1}{2}$ *(infatti, applicando le formule di sdoppiamento, l'equazione della tangente alla parabola nel punto C è* $\frac{x+4}{2} = -\frac{1}{2}2y + 6$
  $x + 4 = -2y + 12\,; \qquad 2y = -x + 8\,; \qquad y = -\frac{1}{2}x + 4\,.$

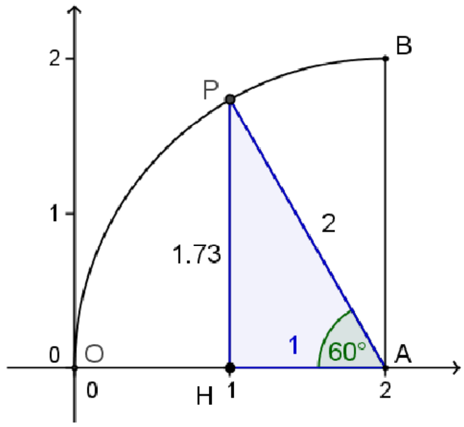
Punto 2

Consideriamo la funzione $\quad f(x) = \int_{-4}^{x} g(t)\, dt$

$f(-4) = \int_{-4}^{-4} g(t)\, dt = 0$ *perché gli estremi di integrazione coincidono.*

$f(0) = \int_{-4}^{0} g(t)\, dt = -\frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = -2\pi$ *perché rappresenta l'area della semicirconferenza di diametro AO, presa con segno negativo perché si trova nel semipiano negativo delle y.*

$$f(1) = \int_{-4}^{1} g(t)\, dt = \int_{-4}^{0} g(t)\, dt + \int_{0}^{1} g(t)\, dt = -2\pi + \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{4}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Infatti, l'area del triangolo mistilineo si può ottenere come differenza fra l'area del settore circolare OPA e l'area del triangolo rettangolo PHA:

$cos\,\widehat{PAH} = \frac{\overline{HA}}{\overline{PA}}$; $\qquad cos\,\widehat{PAH} = \frac{1}{2}$; $\qquad \widehat{PAH} = 60°$.

$\overline{PH} = \sqrt{\overline{PA}^{\,2} - \overline{HA}^{\,2}} = \sqrt{2^{\,2} - 1^{\,2}} = \sqrt{3}$.

$\int_{0}^{1} g(t)\, dt \;=\; S_{\stackrel{\triangle}{\widehat{OAP}}} - S_{\stackrel{\triangle}{\widehat{PHA}}} \;=\; \frac{1}{6}\pi \cdot r^2 - \frac{1}{2} \cdot \overline{HA} \cdot \overline{PH} \;=$

$= \;\frac{1}{6}\pi \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \;=\; \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$f(2) = \int_{-4}^{2} g(t)\, dt = \int_{-4}^{0} g(t)\, dt + \int_{0}^{2} g(t)\, dt = -2\pi + \pi = -\pi.$$

$$f(4) = \int_{-4}^{4} g(t)\, dt = \int_{-4}^{2} g(t)\, dt + \int_{2}^{4} g(t)\, dt = -\pi + 2^2 = -\pi + 4\,.$$

$$f(6) = \int_{-4}^{6} g(t)\, dt = \int_{-4}^{4} g(t)\, dt + \int_{4}^{6} g(t)\, dt = -\pi + 4 + \frac{2}{3} \cdot 2^2 = -\pi + \frac{20}{3}.$$

Infatti, $\int_4^6 g(t)\, dt$ *rappresenta l'area del segmento parabolico inscritto al quadrato di vertici C e D e lato 2.*
Quindi per il T. di Archimede: $\int_4^6 g(t)\, dt = \frac{2}{3} \cdot 2^2 = \frac{8}{3}$.

Punto 3.a

Sapendo che:

$f(2) = -\pi < 0$ *e* $f(4) = -\pi + 4 > 0$,

per il teorema di Bolzano (Esistenza degli zeri), esiste un punto $c \in]2,4[$ *tale che* $f(c) = 0$.

Ma $f(c) = f(2) + S_{IGFB}$

con $S_{IGFB} = \overline{IG} \cdot \overline{IB} = (x_G - 2) \cdot 2$

Quindi, si ha che:

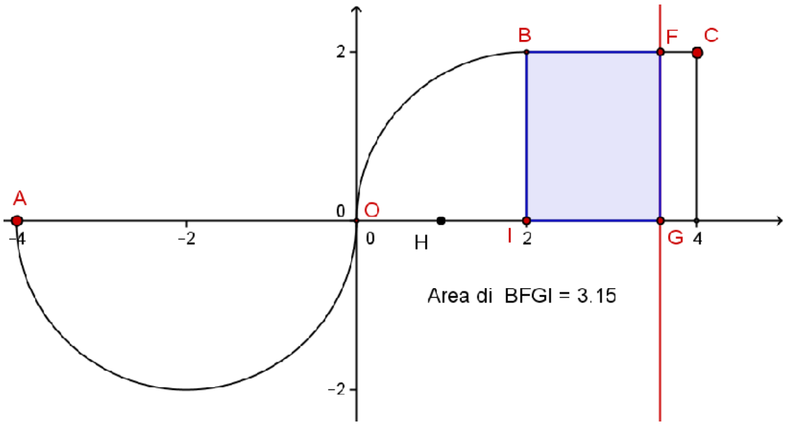
$f(c) = 0$;

$f(2) + S_{IGFB} = 0$;

$-\pi + (x_G - 2) \cdot 2 = 0$;

$2x_G = 4 + \pi$;

$x_G = 2 + \frac{\pi}{2}$.



Oppure con un semplice ragionamento, il punto G *deve trovarsi in una posizione tale che l'area del rettangolo IGFB sia uguale a* π. *Siccome l'altezza di tale rettangolo misura 2, si ha che la base* $\overline{IG} = \frac{\pi}{2}$. *E quindi* $c = 2 + \frac{\pi}{2}$.

Analizzando i dati fin qui trovati:

La funzione continua $f(x)$ *:*

nel punto $x = -4$	*è nulla*	$f(-4) = 0$	
nell'intervallo $]-4\,,0[$	*decresce*	*perché la sua derivata è negativa*	$[\ f'(x) = g(x) < 0\ ]$
nel punto $x = -2$	*vale*	$f(-2) = -\pi$	
nel punto $x = 0$	*vale*	$f(0) = -2\pi$ $[Minimo\ \ assoluto]$	
nell'intervallo $]0\,,6[$	*cresce*	*perché la sua derivata è positiva*	$[\ f'(x) = g(x) > 0\ ]$

In particolare

nel punto $x = 2$	*vale*	$f(2) = -\pi$	
nel punto $x = 2 + \frac{\pi}{2}$	*è nulla*	$f\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) = 0$	
nel punto $x = 4$	*vale*	$f(4) = -\pi + 4$	
nel punto $x = 6$	*vale*	$f(6) = -\pi + \frac{20}{3}$	$[Massimo\ \ assoluto]$

Riassumendo:

La funzione $f(x)$ *si annulla in* $x = -4$ *e* $x = 2 + \frac{\pi}{2}$

La funzione $f(x)$ *è negativa per* $-4 < x < 2 + \frac{\pi}{2}$

La funzione $f(x)$ *è positiva per* $2 + \frac{\pi}{2} < x \leq 6$

Punto 3.b

Osserviamo che: $f'(x) = g(x)$.

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale $f''(x) = g'(x)$.

Esaminando il grafico della funzione $g(x)$*, ricaviamo che:*

nell'intervallo $]-4\,,-2[$	$f''(x) = g'(x) < 0$ *(concavità negativa)*	*perché* $g(x)$ *è decrescente*
nel punto $x = -2$	$f''(-2) = g'(-2) = 0$	*perché in* $x = -2$ *la tangente è orizzontale*
nell'intervallo $]-2\,,0[$	$f''(x) = g'(x) > 0$ *(concavità positiva)*	*perché* $g(x)$ *è crescente*
nell'intervallo $]0\,,2[$	$f''(x) = g'(x) > 0$ *(concavità positiva)*	*perché* $g(x)$ *è crescente*
nell'intervallo $[2\,,4[$	$f''(x) = g'(x) = 0$ *(linea retta)*	*perché* $g(x)$ *è costante*
nell'intervallo $]4\,,6[$	$f''(x) = g'(x) < 0$ *(concavità negativa)*	*perché* $g(x)$ *è decrescente*

Riassumendo:

La funzione $f''(x)$ *si annulla per* $x = -2 \quad \vee \quad 2 \leq x < 4$

La funzione $f(x)$ *è negativa per* $-4 < x < -2 \quad \vee \quad 4 < x < 6$

La funzione $f(x)$ *è positiva per* $-2 < x < 0 \quad \vee \quad 0 < x < 2$

Punto 4

La funzione $f(x)$ *è continua nell'intervallo chiuso* $[-4;\ 6]$.

Pertanto, per il teorema di Weierstrass, $f(x)$ *ha in questo intervallllo un massimo assoluto e un minimo assoluto.*

Il minimo assoluto si ha in $x = 0$ *e vale* $f(0) = -2\pi$.

Il massimo assoluto si ha in $x = 6$ *e vale* $f(6) = -\pi + \frac{20}{3}$.

Dai dati ottenuti nel punto 3.a, si ricava il grafico della funzione $f(x)$.