ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

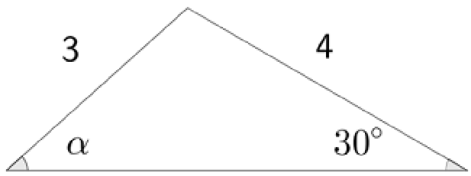
Sessione Ordinaria 2014

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Questionario

Quesito 1

Nel triangolo disegnato a lato, qual è la misura, in gradi e primi sessagesimali, di α?



<u>*Soluzione*</u>

Applicando il teorema dei seni si ha:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin b} \; ; \qquad \frac{4}{\sin\alpha} = \frac{3}{\sin 30°} \; ; \qquad 3 \cdot \sin\alpha = 4 \cdot \sin 30° \; ; \qquad \sin\alpha = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \; ; \qquad \sin\alpha = \frac{2}{3} \; ;$$

$$\alpha = arcsin\frac{2}{3} = 41{,}81\ldots° \cong 41°\,(0{,}81 \cdot 60)' \cong 41°\,48{,}62\ldots' \cong 41°\,49' \, .$$

Quesito 2 (simile al quesito 4 dell’Esame di Stato del 2008/2009 PNI)

Si spieghi perché non esistono poliedri regolari le cui facce siano esagoni.

<u>Soluzione</u>

Un poliedro si dice regolare se le sue facce sono poligoni regolari congruenti e i suoi angoloidi sono congruenti tra loro. Diversamente dagli analoghi poligoni regolari nel piano, che possono avere un infinito numero di lati, i poliedri regolari, nello spazio, sono solo cinque.
Infatti in ogni vertice del poliedro regolare devono concorrere almeno tre facce costituite da poligoni regolari e la somma degli angoli delle facce che si incontrano in tali vertici deve essere minore di 360 gradi; in caso contrario le facce si appiattirebbero in uno stesso piano.
Questo implica che non è possibile avere facce esagonali o con un numero maggiore di lati, dato che questi poligoni hanno angoli interni maggiori o uguali a 120 gradi.

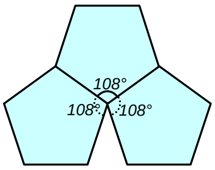
Pertanto:

- *se le facce che concorrono in un vertice sono triangoli equilateri (angoli di 60°), si hanno tre casi:*
  - *3 facce (somma degli angoli uguale a 180°) – TETRAEDRO (4 triangoli equilateri)*
  - *4 facce (somma degli angoli uguale a 240°) – OTTAEDRO (8 triangoli equilateri)*
  - *5 facce (somma degli angoli uguale a 300°) – ICOSAEDRO (20 triangoli equilateri)*

  Non si possono costruire poliedri regolari aventi 6 facce, perché la somma degli angoli è uguale a 360°, e quindi tassellano il piano.

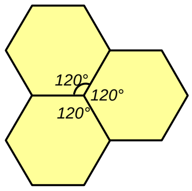
- *se le facce che concorrono in un vertice sono quadrati (angoli di 90°), si ha solo un caso:*
  - *3 facce (somma degli angoli uguale a 270°) – CUBO o ESAEDRO (6 quadrati)*

  Non si possono costruire poliedri regolari aventi 4 facce, perché la somma degli angoli è uguale a 360°, e quindi tassellano il piano.



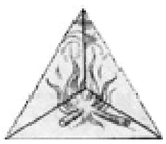
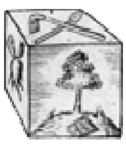
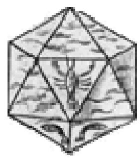
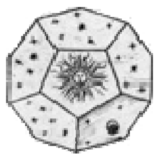
- *se le facce che concorrono in un vertice sono pentagoni regolari (angoli di 108°) si ha solo un caso:*
  - *3 facce (somma degli angoli uguale a 324°) – DODECAEDRO (12 pentagoni regolari).*

  Non si possono costruire poliedri regolari aventi 4 facce, perché la somma degli angoli è uguale a 432°, e quindi il poliedro è irrealizzabile.



- ***Non si possono costruire poliedri regolari aventi facce costituite da esagoni regolari*** *perché 3 esagoni regolari tassellano il piano (somma degli angoli uguale a* $3 \cdot 120 = 360°$ *).*

I cinque corpi regolari

				
Tetraedro *4 facce triangolari* *6 spigoli* *4 vertici*	***Cubo*** *6 facce quadrate* *12 spigoli* *8 vertici*	***Ottaedro*** *8 facce triangolari* *12 spigoli* *6 vertici*	***Icosaedro*** *20 facce triangolari* *30 spigoli* *12 vertici*	***Dodecaedro*** *12 facce pentagonali* *30 spigoli* *20 vertici*

Proclo, storico della matematica del V secolo dopo Cristo, attribuisce a Pitagora la scoperta dei 5 poliedri regolari.

Platone userà questa straordinaria scoperta come simbologia dell'universo e dei suoi elementi base: il fuoco (tetraedro), la terra (cubo), l'aria (ottaedro) e l'acqua (l'icosaedro). Il quinto poliedro regolare, il dodecaedro, era a simboleggiare la quinta essenza che tutto avvolge e comprende. La metafora ha un qualche senso matematico dato che è possibile dimostrare che l'unico poliedro regolare nel quale sia possibile inscrivere gli altri 4 è il dodecaedro. Questa tradizione neo-platonica resterà viva fino a Keplero che credette di poter descrivere i moti dei pianeti in termini di poliedri e loro reciproche inclusioni.

Quesito 3

Venti palline sono poste in un'urna. Cinque sono rosse, cinque verdi, cinque gialle e cinque bianche. Dall'urna si estraggono a caso, senza reimbussolamento, tre palline. Si valutino le seguenti probabilità:

- esattamente una pallina è rossa
- le tre palline sono di colori differenti.

Soluzione 1

Esaminiamo il primo quesito: "viene estratta esattamente una pallina rossa".

Le tre estrazioni avvengono senza reimbussolamento. Pertanto gli eventi sono dipendenti.

La pallina rossa può uscire alla prima, alla seconda oppure alla terza estrazione.

Indicando gli eventi con:

R = "viene estratta esattamente una pallina rossa" *R_1 = "esce una pallina rossa alla prima estrazione"*

R_2 = "esce una pallina rossa alla seconda estrazione" *R_3 = ""esce una pallina rossa alla terza estrazione"*

Si ottiene:

$$P(R_1)=\frac{5}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}=\frac{35}{228} \qquad P(R_2)=\frac{15}{20}\cdot\frac{5}{19}\cdot\frac{14}{18}=\frac{35}{228} \qquad P(R_2)=\frac{15}{20}\cdot\frac{14}{19}\cdot\frac{5}{18}=\frac{35}{228}$$

$$P(R)=\frac{35}{228}+\frac{35}{228}+\frac{35}{228}=\frac{105}{228}=\frac{35}{76}$$

Esaminiamo il secondo quesito: "vengono estratte tre palline di colori differenti".

Alla prima estrazione può essere estratta una pallina di qualsiasi colore.

Alla seconda estrazione può essere estratta una pallina di qualsiasi colore eccetto quello della prima estrazione.

Alla terza estrazione può essere estratta una pallina di un colore che sia diverso dai colori delle due palline precedentemente estratte.

Indicando l'evento con D =" vengono estratte tre palline di colori differenti" si ha: $P(D)=\frac{20}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{10}{18}=\frac{25}{57}$.

Soluzione 2 del primo quesito

Esaminiamo il primo quesito: R ="viene estratta esattamente una pallina rossa".

I casi favorevoli sono $Cf=C_{5,1}\cdot C_{15,2}=\binom{5}{1}\cdot\binom{15}{2}=5\cdot\frac{15\cdot 14}{1\cdot 2}=525$

Combinazioni di 5 oggetti in gruppi di 1 e combinazioni di 15 oggetti in gruppi di 2.

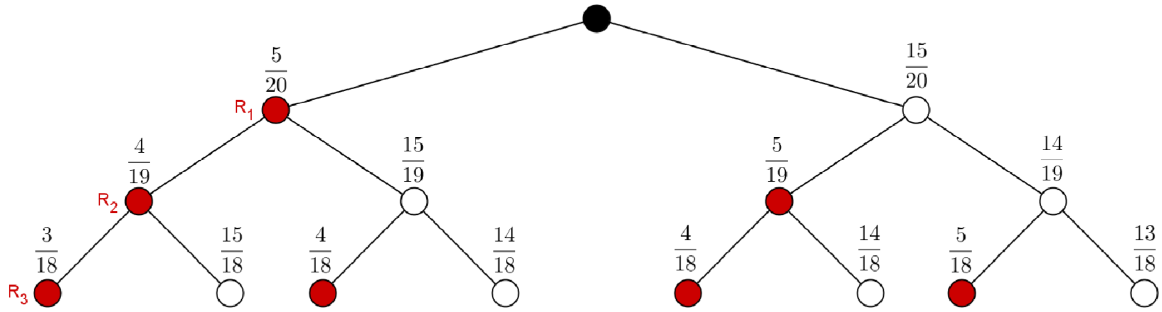
I casi possibili sono le combinazioni di 20 oggetti in gruppi di 3. $Cp=C_{20,3}=\binom{20}{3}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3}=1140$.

Si ricava quindi: $P(R)=\frac{525}{1140}=\frac{35}{76}$.

Soluzione 3 del primo quesito

Esaminiamo il primo quesito: "viene estratta esattamente una pallina rossa".

Utilizzando un diagramma ad albero:

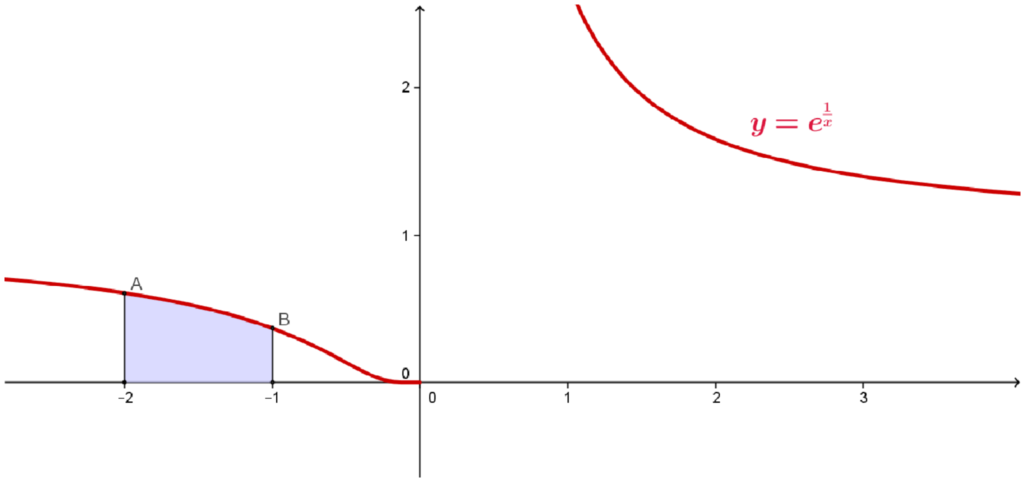


La probabilità che venga estratta esattamente una pallina rossa è:

$$P(R) = \frac{5}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}+\frac{15}{20}\cdot\frac{5}{19}\cdot\frac{14}{18}+\frac{15}{20}\cdot\frac{14}{19}\cdot\frac{5}{18} = 3\cdot\frac{15}{20}\cdot\frac{14}{19}\cdot\frac{5}{18} = \frac{35}{76}.$$

Quesito 4

Un solido Ω ha per base la regione R delimitata dal grafico di $f(x) = e^{1/x}$ e dall'asse x sull'intervallo $[-2, -1]$. In ogni punto di R di ascissa x, l'altezza del solido è data da $h(x) = \frac{1}{x^2}$. Si calcoli il volume del solido.



<u>Soluzione</u>

Il solido Ω con base R ha come sezioni perpendicolari all'asse x rettangoli con altezza $h(x) = \frac{1}{x^2}$.

Utilizzando il cosiddetto metodo a fette, il volume V del solido Ω è dato dalla somma integrale dei parallelepipedi la cui area di base è $e^{\frac{1}{x}}$ e altezza $\frac{1}{x^2}$.

$$V = \int_{-2}^{-1} e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}\, dx = -\int_{-2}^{-1} e^{\frac{1}{x}} \cdot \left[-\frac{1}{x^2}\right] dx = -\left[e^{\frac{1}{x}}\right]_{-2}^{-1} = -\left[e^{\frac{1}{-1}} - e^{\frac{1}{-2}}\right] = -\left[\frac{1}{e} - \frac{1}{\sqrt{e}}\right] = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e}.$$

Quesito 5 (simile al quesito *10* dell'Esame di Stato del 20*08*/20*09 PNI*)

In un contesto di geometria non euclidea si illustri un esempio di triangolo i cui angoli non hanno somma 180°.

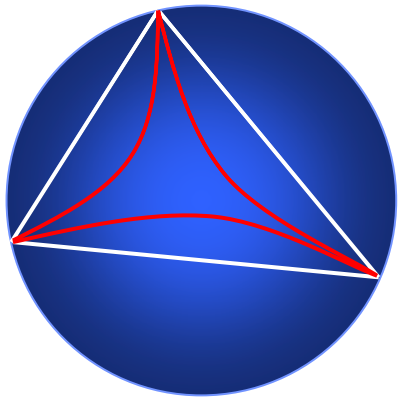
<u>*Soluzione*</u>

Nella prima metà del XIX secolo i matematici Lobacevskij e Riemann furono i primi a costruire una geometria non euclidea, ottenuta sostituendo il V Postulato con la sua negazione (geometria iperbolica e geometria ellittica).

Nella geometria iperbolica (Lobacevskij), dati una retta e un punto esterno a essa, esistono infinite rette passanti per il punto dato che non intersecano la retta.

In tale geometria viene negata l'unicità della parallela ad una retta data passante per un punto. Per un punto P passano infinite parallele alla retta data.

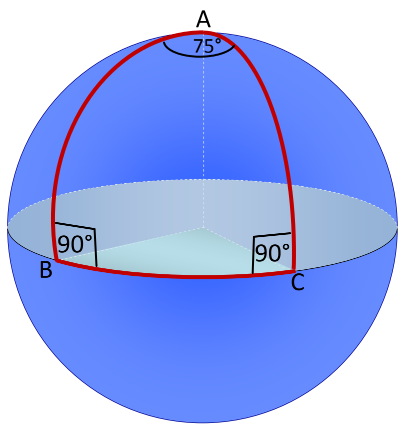
In questa struttura, la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre minore di un angolo piatto. I lati non sono segmenti ma archi di iperboli perpendicolari al cerchio esterno.



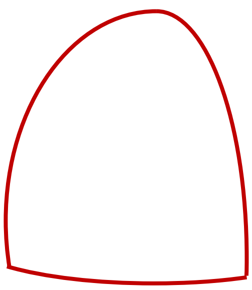
Nella geometria ellittica di Riemann viene negata l'esistenza stessa di una parallela alla retta r passante per il punto P.

In questa geometria la somma degli angoli di un triangolo è sempre maggiore di un angolo piatto ed i lati non sono segmenti ma archi di circonferenza.

Un modello di geometria ellittica si ottiene se si considera una superficie sferica e su di essa si considerano come "rette" le circonferenze massime.

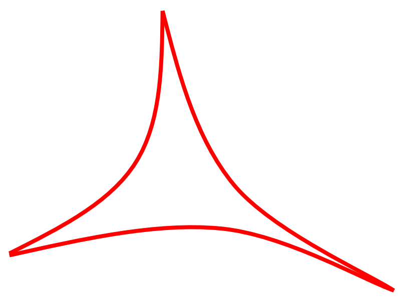


Triangolo ellittico



$$\alpha' + \beta' + \gamma > 180°$$

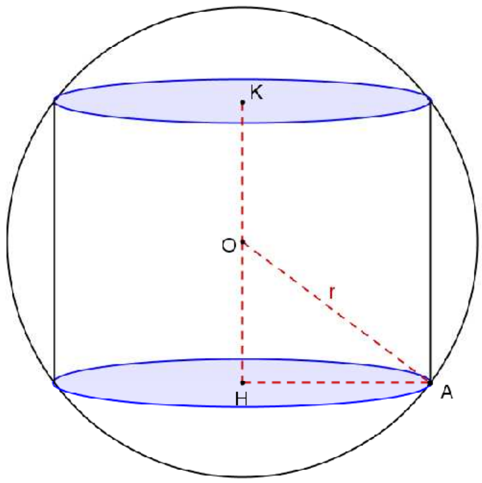
Triangolo iperbolico



$$\alpha' + \beta' + \gamma < 180°$$

Quesito 6 (simile al quesito 1 dell'Esame di Stato del 2010/2011 Corso di ordinamento)

Si calcoli l'altezza e il raggio del massimo cilindro circolare retto inscritto in una sfera di raggio $\sqrt{3}$.



Soluzione

Poniamo $\overline{OH} = x$ *con i limiti geometrici* $0 < x < \sqrt{3}$

$\overline{AH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{3 - x^2}$

Il volume del cilindro è dato da: $V = \pi\, \overline{AH}^2 \cdot h$

$V(x) = \pi \cdot 2x \cdot (3 - x^2)$

$V(x) = 2\pi \cdot (3\, x - x^3)$

La derivata prima è:

$V^I(x) = 2\pi \cdot (3 - 3x^2)$

$V^I(x) = 0;\quad 2\pi \cdot (3 - 3x^2) = 0;\quad x_{1,2} = \begin{matrix} -1 & non\ accettabile \\ +1 & accettabile \end{matrix}$

$V^I(x) > 0;\quad 0 < x < 1$

$V^I < 0;\quad 1 < x < \sqrt{3}$

Pertanto il massimo volume si ha per $x = 1$

Sostituendo tale valore si ottiene:

Altezza del cilindro = 2

Raggio del cilindro $\overline{AH} = \sqrt{3 - 1^2} = \sqrt{2}$.

Quesito 7

Se $f'(x) = \ln x - x + 2$, per quale dei seguenti valori approssimati di x, f ha un minimo relativo?

(A) 5,146 (B) 3,146 (C) 1,000 (D) 0,159 (E) 0

<u>Soluzione</u>

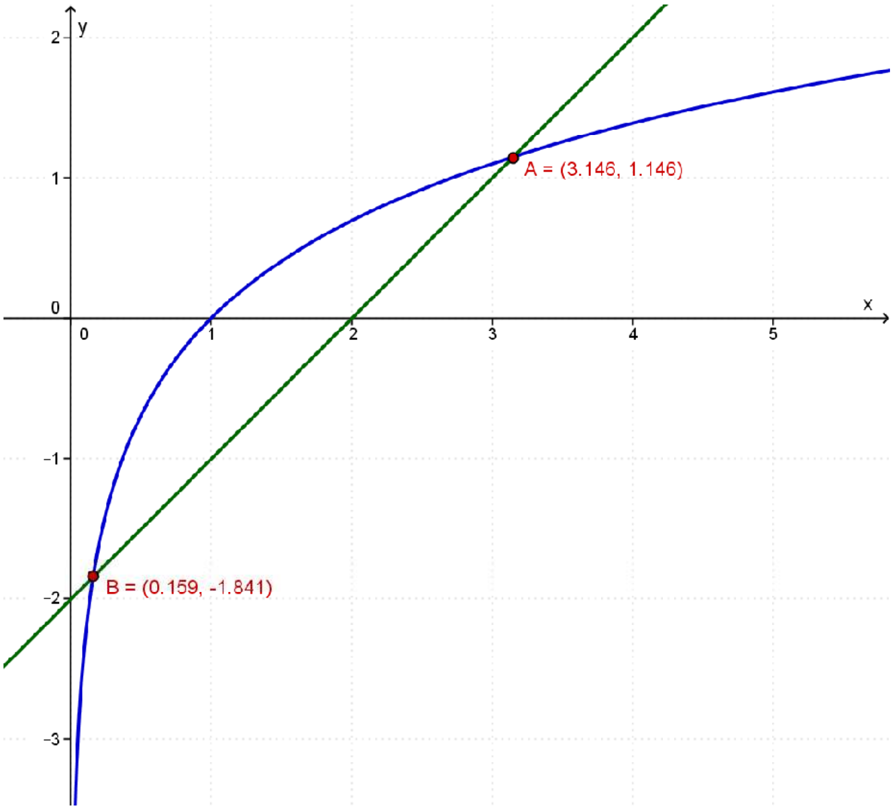
La funzione $f'(x) = \ln x - x + 2$ *è definita e continua nell'intervallo* $D = [0, +\infty[$.

Per determinare il punto in cui la funzione $f(x)$ *ha un minimo relativo occorre studiare il segno di* $f'(x)$.

$f'(x) \geq 0$; $\ln x - x + 2 \geq 0$; $\ln x \geq x - 2$

Tale disequazione può essere risolta con il metodo grafico.

Occorre confrontare i grafici delle due funzioni: $y = \ln x$ *e* $y = x - 2$



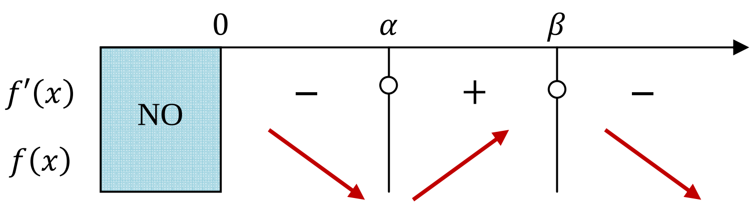
Dal confronto dei due grafici si ricava che le due curve si intersecano in due punti di ascissa α *e* β .

$\alpha \in]0, 1[$ *e* $\beta \in]2, +\infty[$ (*perché per* $x = 2$ *la retta ha ordinata zero, mentre* $\ln 2 > 0$) .

Inoltre, dall'esame del grafico:

$f'(x) > 0$ *cioè* $\ln x > x - 2$ *per* $\alpha < x < \beta$

$f'(x) < 0$ *cioè* $\ln x < x - 2$ *per* $0 < x < \alpha \quad \vee \quad x > \beta$



Dallo studio del segno di $f(x)$ *si ha che l'unico punto di minimo relativo è* α .

Esaminando le opzioni del quesito si conclude che la funzione $f(x)$ *ha un minimo relativo per* $x = \alpha \cong 0{,}159$

Quesito 8

La "*zara*" è un gioco d'azzardo di origine araba che conobbe particolare fortuna in Italia in epoca medievale – ne parla anche Dante nella *Divina Commedia* – e si giocava con tre dadi. Si confronti la probabilità di ottenere in un lancio la somma 9 con quella di ottenere la somma 10.

<u>*Soluzione*</u>

Dante fa riferimento a questo gioco nel VI Canto del Purgatorio.

Quando si parte il gioco de la zara,
colui che perde si riman dolente,
ripetendo le volte, e tristo impara;
con l'altro se ne va tutta la gente.

I casi possibili sono $Cp = 6^3 = 216$.

Per determinare il numero di casi favorevoli, occorre determinare le terne la cui somma è 9:

Terna	**Altre disposizioni della Terna**				
1 – 2 – 6	1 – 6 – 2	2 – 1 – 6	2 – 6 – 1	6 – 1 – 2	6 – 2 – 1
1 – 3 – 5	1 – 5 – 3	3 – 1 – 5	3 – 5 – 1	5 – 1 – 3	5 – 3 – 1
1 – 4 – 4	4 – 1 – 4	4 – 4 – 1			
2 – 2 – 5	2 – 5 – 2	5 – 2 – 2			
2 – 3 – 4	2 – 4 – 3	3 – 2 – 4	3 – 4 – 2	4 – 2 – 3	4 – 3 – 2
3 – 3 – 3					

Si hanno quindi, 25 casi favorevoli.

Pertanto $P(somma = 9) = \frac{25}{216}$.

Determiniamo il numero delle terne la cui somma è 10:

Terna	**Altre disposizioni della Terna**				
1 – 3 – 6	1 – 6 – 3	3 – 1 – 6	3 – 6 – 1	6 – 1 – 3	6 – 3 – 1
1 – 4 – 5	1 – 5 – 4	4 – 1 – 5	4 – 5 – 1	5 – 1 – 4	5 – 4 – 1
2 – 2 – 6	2 – 6 – 2	6 – 2 – 2			
2 – 3 – 5	2 – 5 – 3	3 – 2 – 5	3 – 5 – 2	5 – 2 – 3	5 – 3 – 2
2 – 4 – 4	4 – 2 – 4	4 – 4 – 2			
3 – 3 – 4	3 – 4 – 3	4 – 3 – 3			

Si hanno quindi, 27 casi favorevoli.

Pertanto, $P(somma = 10) = \frac{27}{216}$.

Si conclude che:

$P(somma = 10) \ > \ P(somma = 9)$.

Quesito 9 (simile al quesito 4 dell'Esame di Stato del 2011/2012 PNI)

Le lettere N, Z, Q, R denotano, rispettivamente, gli insiemi dei numeri naturali, interi, razionali e reali mentre il simbolo $\aleph_0$ (*aleph-zero*) indica la cardinalità di N. Gli insiemi Z, Q e R hanno anch'essi cardinalità $\aleph_0$? Si motivi la risposta.

<u>*Soluzione*</u>

Ricordiamo che:

- *"Due insiemi A e B si dicono equicardinali o equipotenti se fra i loro elementi si può stabilire una corrispondenza biunivoca".*
- *Un insieme si dice infinito numerabile quando ha la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri naturali N, ossia quando è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra tale insieme ed i numeri naturali. In caso contrario si parla di insieme non numerabile*

L'insieme dei numeri naturali costituisce un sottoinsieme proprio sia dell'insieme dei numeri interi relativi, sia dell'insieme dei numeri razionali. Da questa osservazione si sarebbe portati a concludere erroneamente che: "i numeri relativi e i numeri razionali siano in numero maggiore dei numeri naturali". Invece gli insiemi hanno la stessa cardinalità.

L'insieme Z ha la stessa cardinalità di N perché entrambi numerabili.

Infatti i numeri interi relativi Z si possono mettere in corrispondenza biunivoca con N .

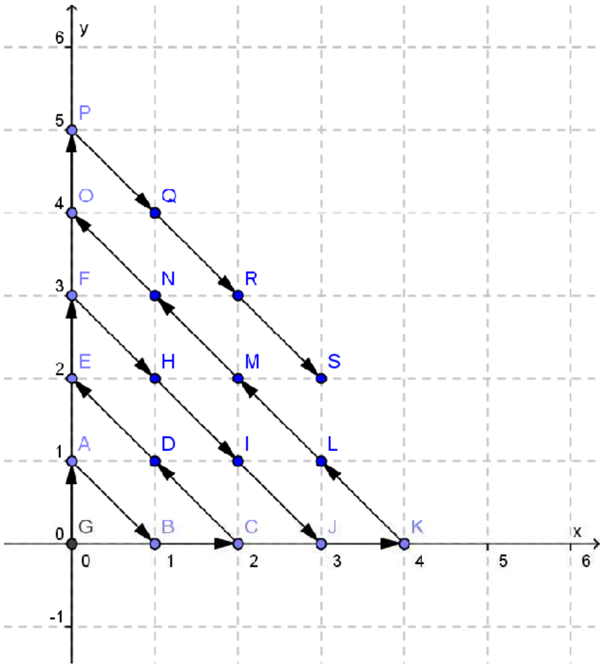
Corrispondenza biunivoca fra N e Z

N	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	…
Z	*0*	*+1*	*-1*	*+2*	*-2*	*+3*	*-3*	*+4*	*-4*	*+5*	*-5*	*+6*	*-6*	…

L'insieme dei numeri razionali Q è numerabile, cioè esiste una corrispondenza biunivoca tra i numeri razionali e i numeri naturali.

Questo risultato (dimostrato da Georg Cantor) si basa sul diagramma a lato:

È possibile ordinare i razionali positivi, seguendo le frecce, in modo che ad ognuno di essi sia assegnato un numero naturale (anzi, ogni numero sarà contato infinite volte, perché ognuno ha un'infinità di rappresentazioni diverse $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=$ *...)*



La corrispondenza biunivoca è la seguente:

N	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	...			
Q	(0; 0)	(0; 1)	(1; 0)	(2; 0)	(1; 1)	(0; 2)	(0; 3)	(1; 2)	(2; 1)	(3; 0)	(4; 0)	(3; 1)	...			

Procedendo in maniera analoga si dimostra che i numeri razionali negativi sono numerabili.

Poiché l'unione di due insiemi numerabili è ancora numerabile, si conclude che l'insieme dei numeri razionali è numerabile.

Quindi L'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali sono insiemi equipotenti.

Il matematico tedesco Georg Cantor ha dimostrato nel 1872 che invece R ha la potenza del continuo: non esiste una corrispondenza biunivoca dei suoi elementi con i numeri naturali N.

Quesito 10

Si stabilisca per quali valori reali di a e b, si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+bx}-2}{x}=1$$

Soluzione 1

Affinché il limite proposto sia uguale a 1, deve essere necessariamente $a = 4$ *. (altrimenti il limite sarebbe infinito).*
Sotto queste ipotesi si ha:

$$\lim_{n\to 0}\frac{\sqrt{4+bx}-2}{x}=\frac{0}{0}\quad forma\ \ indeterminata\,.$$

Applicando De L'Hospital si ha:

$$\lim_{n\to 0}\frac{\dfrac{b}{2\sqrt{4+bx}}-0}{1} \;=\; \lim_{n\to 0}\frac{b}{2\sqrt{4+bx}} \;=\; \frac{b}{4}\;.$$

Tale limite vale 1 *se* $\quad \frac{b}{4}=1 \quad cio\grave{e} \quad b=4\,.$

In definitiva il limite proposto vale 1 *se* $\quad a=4 \quad \wedge \quad b=4\,.$

Soluzione 2

Il limite poteva essere calcolato anche senza l'utilizzo di De L'Hospital:

$$\lim_{n\to 0}\frac{\sqrt{4+bx}-2}{x} \;=\; \lim_{n\to 0}\frac{\sqrt{4+bx}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{4+bx}+2}{\sqrt{4+bx}+2} \;=\; \lim_{n\to 0}\frac{4+bx-4}{x\cdot\left(\sqrt{4+bx}+2\right)} \;=\; \lim_{n\to 0}\frac{bx}{x\cdot\left(\sqrt{4+bx}+2\right)} \;=$$

$$=\;\lim_{n\to 0}\frac{b}{\sqrt{4+bx}+2} \;=\; \frac{b}{4}\;.$$