

# ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2013

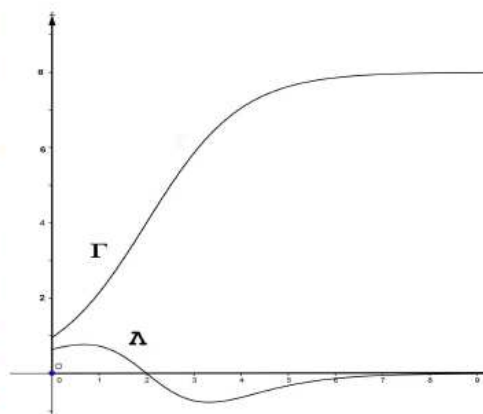
## PIANO NAZIONALE INFORMATICA

### Problema 1

Una funzione  $f(x)$  è definita e derivabile, insieme alle sue derivate prima e seconda, in  $[0, +\infty[$  e nella figura sono disegnati i grafici  $\Gamma$  e  $\Lambda$  di  $f(x)$  e della sua derivata seconda  $f''(x)$ . La tangente a  $\Gamma$  nel suo punto di flesso, di coordinate  $(2; 4)$ , passa per  $(0; 0)$ , mentre le rette  $y = 8$  e  $y = 0$  sono asintoti orizzontali per  $\Gamma$  e  $\Lambda$ , rispettivamente.

- 1) Si dimostri che la funzione  $f'(x)$ , ovvero la derivata prima di  $f(x)$ , ha un massimo e se ne determinino le coordinate. Sapendo che per ogni  $x$  del dominio è:  $f''(x) \leq f'(x) \leq f(x)$ , qual è un possibile andamento di  $f'(x)$ ?

- 2) Si supponga che  $f(x)$  costituisca, ovviamente in opportune unità di misura, il modello di crescita di un certo tipo di popolazione. Quali informazioni sulla sua evoluzione si possono dedurre dai grafici in figura e in particolare dal fatto che  $\Gamma$  presenta un asintoto orizzontale e un punto di flesso?



- 3) Se  $\Gamma$  è il grafico della funzione  $f(x) = \frac{a}{1+e^{b-x}}$ , si provi che  $a = 8$  e  $b = 2$ .
- 4) Nell'ipotesi del punto 3), si calcoli l'area della regione di piano delimitata da  $\Lambda$  e dall'asse  $x$  sull'intervallo  $[0, 2]$ .

### Punto 1

Dall'analisi del grafico della derivata seconda e dall'informazione che la funzione  $\Gamma$  ha un flesso in  $F(2; 4)$  si ha che:

|              |                                         |                                               |
|--------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $f''(2) = 0$ | $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (0, 2)$ | $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (2, +\infty)$ |
|--------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------------|

Ricordiamo che la derivata seconda non è altro che la derivata della derivata prima. Pertanto:

|                               |                                           |                                                 |
|-------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| $(f')' = 0$ in $x = 2$        | $(f')'(x) > 0 \quad \forall x \in (0, 2)$ | $(f')'(x) < 0 \quad \forall x \in (2, +\infty)$ |
| $f'(x)$ è costante in $x = 2$ | $f'$ è crescente $\forall x \in (0, 2)$   | $f'$ è decrescente $\forall x \in (2, +\infty)$ |

Ciò equivale a dire che la funzione derivata prima  $f'(x)$  ha un massimo relativo in  $x = 2$ .

Per determinare l'ordinata del punto di massimo relativo sfruttiamo l'altra informazione:

“la tangente nel punto di flesso  $F(2; 4)$  passa per  $O(0; 0)$ ”

Questa indicazione ci permette di calcolare, mediante la formula della retta per due punti, l'equazione della retta tangente ad  $f(x)$ . Tale tangente ha equazione  $y = 2x$  con coefficiente angolare  $m_t = 2$ .

Avendo determinato il coefficiente angolare della retta tangente  $m_t = 2$ , possiamo concludere che:  $f'(2) = 2$ .

In definitiva, le coordinate del punto di massimo della funzione derivata prima  $f'(x)$  sono:  $(2; 2)$ .

L'informazione:  $\forall x \in I.D. \quad f''(x) \leq f'(x) \leq f(x)$  indica che il grafico della derivata prima  $f'(x)$  è compreso tra i grafici della derivata seconda e della funzione  $f(x)$ . Inoltre:

|                                       |                   |                                         |                   |                                                                                      |                   |                                          |                   |                                                       |
|---------------------------------------|-------------------|-----------------------------------------|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|------------------------------------------|-------------------|-------------------------------------------------------|
| $y = 8$ asintoto orizzontale a destra | $\Leftrightarrow$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 8$ | $\Leftrightarrow$ | La funzione per $x \rightarrow +\infty$ tende ad un andamento parallelo all'asse $x$ | $\Leftrightarrow$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ | $\Leftrightarrow$ | $y = 0$ è un asintoto a destra della funzione $f'(x)$ |
|---------------------------------------|-------------------|-----------------------------------------|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|------------------------------------------|-------------------|-------------------------------------------------------|

Pertanto un possibile andamento della funzione derivata prima è il seguente:



## Punto 2

Dall'esame del grafico della funzione  $\Gamma$  che rappresenta il modello di crescita di una data popolazione si ha:

|                                                              |                   |                                                                                                                                                                                                                                             |
|--------------------------------------------------------------|-------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $f(x)$ è strettamente crescente $\forall x \in (0, +\infty)$ | $\Leftrightarrow$ | La popolazione è in continua crescita                                                                                                                                                                                                       |
| $f(x)$ ha un asintoto orizzontale a destra in $y = 8$        | $\Leftrightarrow$ | La popolazione, in continua crescita, non oltrepassa il valore limite di 8 unità (milioni, miliardi, ecc. di individui).                                                                                                                    |
| La presenza del punto di flesso in $F(2; 4)$                 | $\Leftrightarrow$ | La crescita avviene con ritmi diversi:<br>nell'intervallo $(0, 2)$ il ritmo di crescita aumenta fino ad arrivare al suo massimo valore nel punto $x = 2$ ;<br>nell'intervallo $(2, +\infty)$ il ritmo di crescita rallenta indefinitamente. |

Nota

La velocità di crescita della popolazione nel tempo  $x$  è rappresentata dalla derivata prima della funzione  $f(x)$

## Punto 3

Essendo la retta  $y = 8$  l'asintoto a destra della  $\Gamma$ , deve risultare:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{1 + e^{b-x}} = 8$

Poiché  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{1 + e^{b-x}} = a$  si ha che  $a = 8$

Pertanto la funzione da determinare assume la forma  $f(x) = \frac{8}{1 + e^{b-x}}$

La cui derivata è:  $f'(x) = \frac{-8 \cdot (-e^{b-x})}{(1 + e^{b-x})^2} = \frac{8e^{b-x}}{(1 + e^{b-x})^2}$

Sfruttiamo poi l'informazione  $f'(2) = 2$ :

$$\frac{8e^{b-2}}{(1 + e^{b-2})^2} = 2; \quad 8e^{b-2} = 2 \cdot (1 + e^{b-2})^2; \quad 8e^{b-2}$$

$$= 2 \cdot (1 + e^{2(b-2)} + 2e^{b-2});$$

$$8e^{b-2} = 2 + 2e^{2(b-2)} + 4e^{b-2}; \quad 2e^{2(b-2)} - 4e^{b-2} + 2 = 0; \quad e^{2(b-2)} - 2e^{b-2} + 1 = 0;$$

$$(e^{b-2} - 1)^2 = 0; \quad e^{b-2} - 1 = 0; \quad e^{b-2} = 1; \quad b - 2 = 0; \quad b = 2.$$

#### Punto 4

L'area della regione di piano delimitata da  $\Lambda$  e dall'asse  $x$  sull'intervallo  $[2, 0]$  è data da:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 f''(x) dx = \left[ f'(x) \right]_0^2 = \left[ \frac{8e^{2-x}}{(1+e^{2-x})^2} \right]_0^2 = \frac{8e^{2-2}}{(1+e^{2-2})^2} - \frac{8e^{2-0}}{(1+e^{2-0})^2} = \\ &= \frac{8}{(1+1)^2} - \frac{8e^2}{(1+e^2)^2} = 2 - \frac{8e^2}{(1+e^2)^2} \cong 1,16. \end{aligned}$$