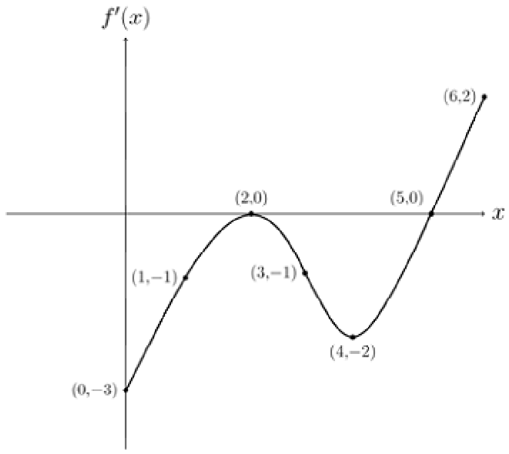
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2012

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Problema 1

Della funzione f, definita per $0 \le x \le 6$, si sa che è dotata di derivata prima e seconda e che il grafico della sua derivata $f'(x)$, disegnato a lato, presenta due tangenti orizzontali per $x = 2$ e $x = 4$. Si sa anche che $f(0) = 9$, $f(3) = 6$ e $f(5) = 3$.



1. Si trovino le ascisse dei punti di flesso di f motivando le risposte in modo esauriente.
2. Per quale valore di x la funzione f presenta il suo minimo assoluto? Sapendo che $\int_0^6 f'(t)dt = -5$ per quale valore di x la funzione f presenta il suo massimo assoluto?
3. Sulla base delle informazioni note, quale andamento potrebbe avere il grafico di f?
4. Sia g la funzione definita da $g(x) = x\,f(x)$. Si trovino le equazioni delle rette tangenti ai grafici di f e di g nei rispettivi punti di ascissa $x = 3$ e si determini la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto che esse formano.

Punto 1

Un punto di flesso è un punto in cui la curva cambia concavità.

L'ascissa del punto di flesso è dato dal valore x_F *tale che:* $\begin{cases} f''(x_F) = 0 \\ f''(x) \ \ cambia\ segno\ nell'intorno\ di\ \ x_F \end{cases}$

Essendo il grafico allegato, il grafico della derivata prima della funzione, le ascisse dei punti di flesso sono dati dai punti estremanti della funzione derivata prima, e cioè $x_1 = 2 \quad \wedge \quad x_2 = 4$ *.*

Punto 2.1

Essendo $f(x)$ *una funzione continua definita nell'intervallo chiuso e limitato* $[0\ ,\ 6]$ *, per il teorema di Weierstrass, essa è dotata di massimo e minimo assoluti.*

Dall'esame del grafico della derivata prima della funzione si ha che:

$in \quad [0\,,2[\qquad f'(x) < 0 \qquad f(x)$ *è decrescente*

$in \quad]2\,,5[\qquad f'(x) < 0 \qquad f(x)$ *è decrescente*

$in \quad]5\,,6[\qquad f'(x) > 0 \qquad f(x)$ *è crescente*

$in \quad x = 2 \qquad f'(x) = 0 \qquad f(x)$ *ha un punto stazionario di flesso a tangente orizzontale discendente*

$in \quad x = 5 \qquad f'(x) = 0 \qquad f(x)$ *ha un punto stazionario di minimo assoluto*

Punto 2.2

Dall'esame del grafico della derivata prima della funzione si ha che $f(x)$ *ha due massimi relativi in x = 0 e x = 6.*

Per determinare quale dei due è il massimo assoluto occorre determinare i valori che la funzione assume in questi punti.

Il testo ci informa che $f(0) = 9$

Determiniamo quindi il valore di $f(6)$

Utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

si ha che:

$$\int_0^6 f'(x)\,dx = f(6) - f(0)$$

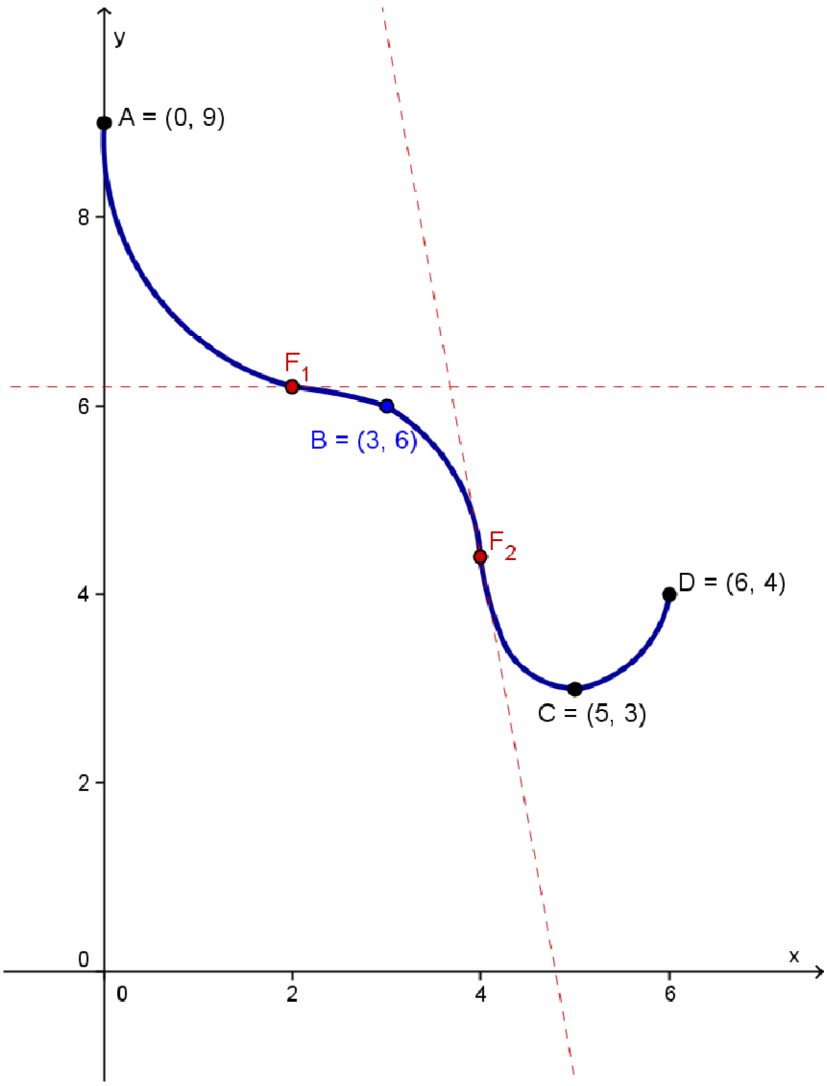
Da cui si ottiene:

$$f(6) \;=\; \int_0^6 f'(x)\,dx + f(0) \;=\; -5 + 9 \;=\; 4$$

Si conclude quindi che il massimo assoluto è assunto nel punto $x = 0$ *e vale* $f(0) = 9$ *.*

Punto 3

Sulla base delle informazioni note, il grafico della funzione $f(x)$ *potrebbe avere il seguente andamento:*



Punto 4

Indichiamo:

con t_1 *la retta tangente alla funzione* $f(x)$

con T_1 *il punto di tangenza di* t_1

con t_2 *la retta tangente alla funzione* $g(x)$

con T_1 *il punto di tangenza di* t_1

Dalla testo del problema si ha: $f(3) = 6 \qquad \Rightarrow \qquad T_1(3\,;6)$

Dal grafico allegato si ha: $f'(3) = -1 \qquad \Rightarrow \qquad m_{t_1} = -1$

Pertanto la tangente t_1 *ha equazione:* $y - 6 = -1 \cdot (x - 3)$; *cioè:* $y = -x + 9$

Essendo $g(3) = 3 \cdot f(3) = 3 \cdot 6 = 18$ *si ha che il punto di tangenza* T_2 *ha coordinate:* $T_2(3\,;18)$

La derivata della funzione $g(x) = x \cdot f(x)$ *è* $g'(x) = 1 \cdot f(x) + x \cdot f'(x)$

Il coefficiente angolare della tangente t_2 *è* $m_{t_2} = g'(3) = 1 \cdot f(3) + 3 \cdot f'(3) = 1 \cdot 6 + 3 \cdot (-1) = 3$

Pertanto la tangente t_2 *ha equazione:* $y - 18 = 3 \cdot (x - 3)$; *cioè:* $y = 3x + 9$

La misura dell'angolo acuto formato dalle due tangenti t_1 *e* t_2 *è dato da:*

$$\tan\alpha = \frac{m_{t_1} - m_{t_2}}{1 + m_{t_1} . m_{t_2}} = \frac{-1-3}{1-1\cdot 3} = 2 \qquad \Rightarrow$$

$$\alpha = \operatorname{atan} 2 = 63{,}43495\ldots^\circ \approx 63^\circ\,(0{,}43495 \cdot 60)' \approx 63^\circ\,26' \;.$$