ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2010

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Problema 2

Nel piano riferito ad un sistema Oxy di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole d'equazioni: $y^2 = 2x$ *e* $x^2 = y$.

a) *Si disegnino le due parabole e se ne determinino le coordinate dei fuochi e le equazioni delle rispettive rette direttrici. Si denoti con A il punto d'intersezione delle due parabole diverso dall'origine O.*

b) *L'ascissa di A è* $\sqrt[3]{2}$ *; si dica a quale problema classico dell'antichità è legato tale numero e, mediante l'applicazione di un metodo iterativo di calcolo, se ne trovi il valore approssimato a meno di* 10^{-2}.

c) *Sia D la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi O e A. Si determini la retta r, parallela all'asse x, che stacca su D il segmento di lunghezza massima.*

d) *Si consideri il solido W ottenuto dalla rotazione di D intorno all'asse x. Se si taglia W con piani ortogonali all'asse x, quale forma hanno le sezioni ottenute? Si calcoli il volume di W.*

Punto a

La parabola $y^2 = 2x$ *riscritta nella forma* $x = \frac{1}{2}y^2$ *ha:*

il vertice nell'origine degli assi cartesiani

l'asse coincidente con l'asse delle x

il fuoco nel punto $F_1\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

per direttrice la retta di equazione: $x = -\frac{1}{2}$

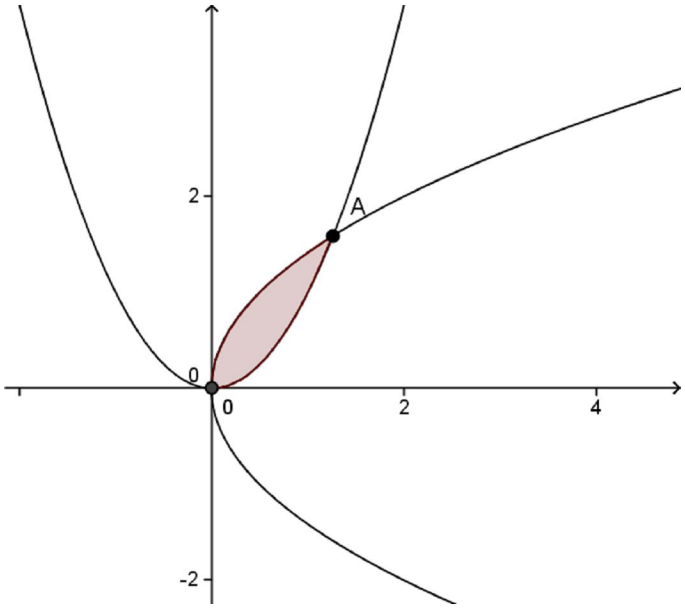
La parabola $x^2 = y$ *riscritta nella forma* $y = x^2$ *ha:*

il vertice nell'origine degli assi cartesiani

l'asse coincidente con l'asse delle y

il fuoco nel punto $F_1\left(\frac{1}{4}; 0\right)$

per direttrice la retta di equazione: $y = -\frac{1}{4}$

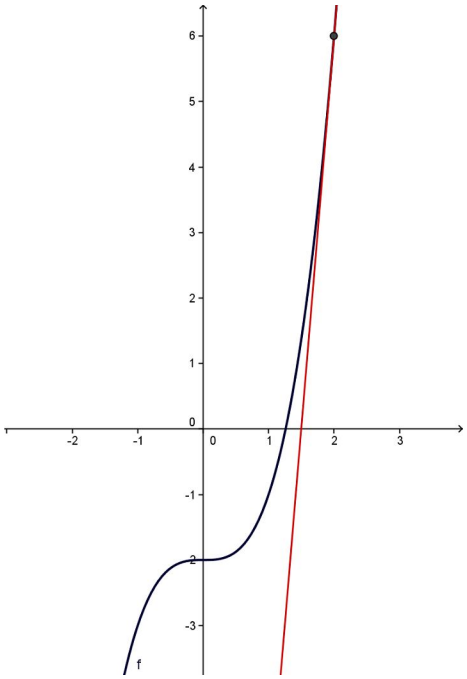


Per determinare le coordinate del punto di intersezione A delle due parabole, risolviamo il sistema costituito dalle equazioni delle due curve:

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ x^2 = y \end{cases} \quad \begin{cases} x^4 = 2x \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x^4 - 2x = 0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x \cdot (x^3 - 2) = 0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x^3 - 2 = 0 \end{array} \right. \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{2} \end{array} \right. \\ - \end{cases}$$

Si ottengono i due punti: $O(0;0)$ *e* $A\left(\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4}\right)$.

Punto b



Il numero $\sqrt[3]{2}$ *scaturisce dal problema della duplicazione del cubo che consiste nella costruzione di un cubo avente volume doppio rispetto a quello di un cubo di spigolo* x *assegnato. Lo spigolo* x^I *del cubo cercato è, perciò, tale che* $\left(x^I\right)^3 = 2x^3$ *cioè* $x^I = \sqrt[3]{2}\,x$.

Il problema è anche conosciuto come problema di Delo (gli abitanti di Delo, città della Grecia, avendo interrogato l'oracolo di Apollo sul modo di liberarsi dalla peste, avevano ricevuto il consiglio di costruire un altare, di forma cubica, dal volume doppio rispetto a quello esistente; ma non erano riusciti nell'impresa).

Il problema della duplicazione del cubo, assieme al problema della trisezione dell'angolo e a quello della quadratura del cerchio, costituisce uno dei tre problemi classici della geometria greca, rilevanti in quanto non risolubili con riga e compasso.

Il valore di $\sqrt[3]{2}$ *è la soluzione dell'equazione* $x^3 - 2 = 0$.

Per trovare un valore approssimato a meno di un centesimo applichiamo il metodo delle tangenti alla funzione: $f(x) = x^3 - 2$.

La funzione $f(x) = x^3 - 2$ *è continua e derivabile* $\forall x \in R$.

$f(1) = -1 < 0$ *mentre* $f(2) = 6 > 0$.

Pertanto, per il Teorema dell'esistenza degli zeri, ammette almeno una soluzione nell'intervallo $(1,2)$.

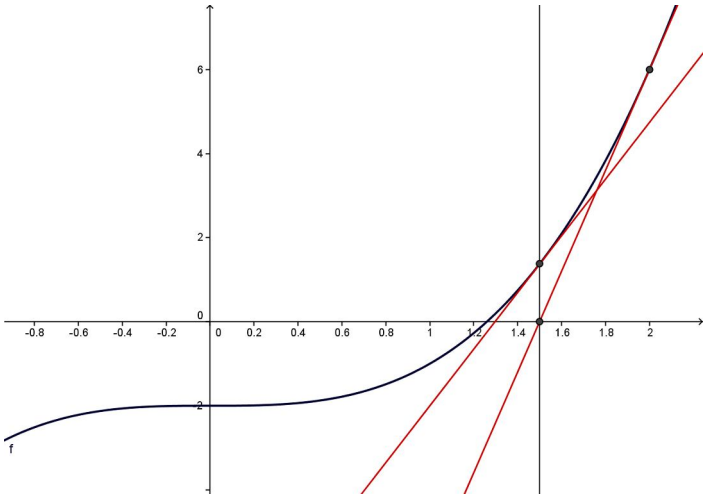
Ma essendo $f^I(x) = 3x^2 > 0 \quad \forall x \in [1;2]$, *la funzione* $f(x)$ *è strettamente crescente, e quindi possiede un unico zero.*

Per calcolarne un'approssimazione usiamo il metodo di Newton.

Essendo $f^{II}(x) = 6x > 0 \quad \forall x \in [1;2]$ *e* $f(2) = 6 > 0$

si prende come punto iniziale $x_0 = 2$.

Con la formula iterativa: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f^I(x_n)}$ *si ottiene:*



$$x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h^I(x_0)} = 2 - \frac{6}{12} = 1{,}5$$

$$x_2 = x_1 - \frac{h(x_1)}{h^I(x_1)} = 1{,}5 - \frac{1{,}375}{6{,}750} = 1{,}5 - 0{,}204 = 1{,}296$$

$$x_3 = x_2 - \frac{h(x_2)}{h^I(x_2)} = 1{,}296 - \frac{0{,}178}{5{,}041} = 1{,}296 - 0{,}035 = 1{,}261$$

$$x_4 = x_3 - \frac{h(x_3)}{h^I(x_3)} = 1{,}261 - \frac{0{,}005}{4{,}770} = 1{,}261 - 0{,}01 = 1{,}260$$

Essendo $|x_3 - x_4| < \dfrac{1}{100}$ l'approssimazione a due cifre decimali del valore cercato è: $x = 1{,}26$.

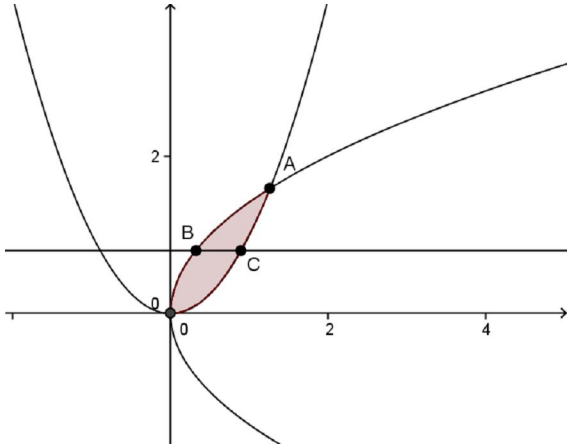
METODO DELLE TANGENTI		
$f(x) = x^3 - 2$	**Approssimazione**	0,01

x_n		h (x)	$h^I(x)$	h(x) / h^I(x)	x_n – h(x) / h^I(x)	Approssimazione	
x_1	2	6,000	12,000	0,500	1,500	1,500	continua
x_2	1,500	1,375	6,750	0,204	1,296	0,204	continua
x_3	1,296	0,178	5,041	0,035	1,261	0,035	continua
x_4	1,261	0,005	4,770	0,001	1,260	0,001	STOP

Punto c

La retta $y = k$ *incontra la parabola* $y^2 = 2x$ *nel punto* $B\left(\frac{k^2}{2}; k\right)$

La retta $y = k$ *incontra la parabola* $x^2 = y$ *nel punto* $C\left(\sqrt{k}; k\right)$



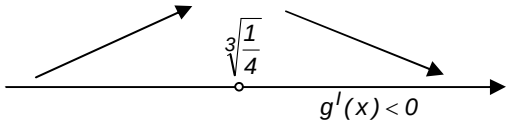
Il segmento BC misura: $g(k) = \sqrt{k} - \frac{k^2}{2}$ *con* $0 \le k \le \sqrt[3]{4}$.

$$g^I(k) = \frac{1}{2\sqrt{k}} - k = \frac{1 - 2k\sqrt{k}}{2\sqrt{k}} = \frac{1 - 2\sqrt{k^3}}{2\sqrt{k}}$$

$$g^I(k) = 0; \quad \frac{1 - 2\sqrt{k^3}}{2\sqrt{k}} = 0; \quad 1 - 2\sqrt{k^3} = 0; \quad \sqrt{k^3} = \frac{1}{2};$$

$$k^3 = \frac{1}{4}; \quad k = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} .$$

$$g^I(k) > 0; \quad \frac{1 - 2\sqrt{k^3}}{2\sqrt{k}} > 0; \quad \begin{matrix} 1 - 2\sqrt{k^3} > 0 \\ 2\sqrt{k} > 0 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} k < \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \\ \forall k \in \left[0; \sqrt[3]{4}\right] \end{matrix}$$



Il segmento di lunghezza massima si ottiene, quindi, in corrispondenza della retta $y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

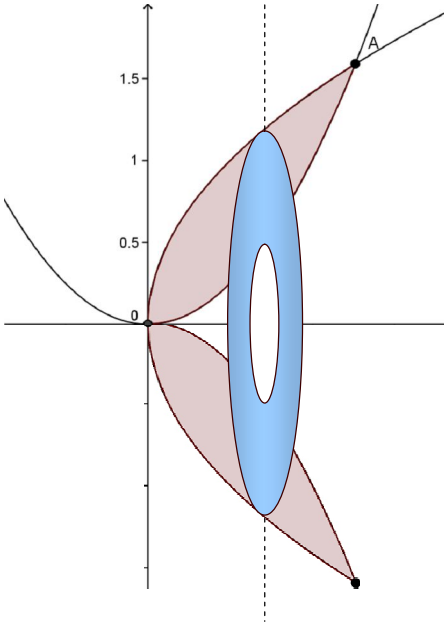
Punto c

Le sezioni ottenute tagliando il dominio D con piani ortogonali all'asse x,

con $0 < x < \sqrt[3]{2}$, *sono corone circolari.*

Mentre per $x = 0$ *si ha il punto* $O(0; 0)$

e per $x = \sqrt[3]{2}$ *si ha un cerchio di raggio* $r = \sqrt[3]{4}$



Il volume del solido di rotazione W è dato dalla differenza :

$$V_W = \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} [f_1(x)]^2 dx - \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} [f_2(x)]^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} 2x \cdot dx - \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} x^4 dx = \pi \cdot \left[x^2 - \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \pi \cdot \left[\sqrt[3]{4} - \frac{\sqrt[3]{2^5}}{5} \right] = \pi \cdot \left[\sqrt[3]{4} - \frac{2\sqrt[3]{4}}{5} \right] = \pi \cdot \left[\frac{5\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{4}}{5} \right] = \frac{3}{5}\sqrt[3]{4}\,\pi .$$