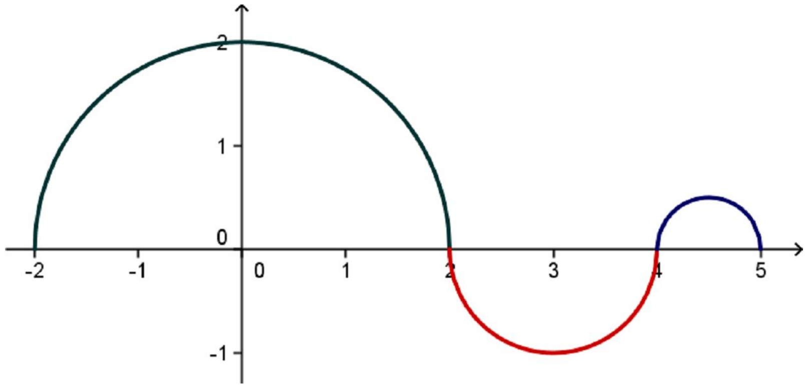
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2010

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Problema 1

Nella figura che segue è riportato il grafico di g(x) per $-2 \le x \le 5$ *essendo g la derivata di una funzione f.*
Il grafico consiste di tre semicirconferenze con centri in $(0;0)$, $(3;0)$, $\left(\frac{9}{2};0\right)$ *e raggi rispettivi 2, 1,* $\frac{1}{2}$.



a) *Si scriva un'espressione analitica di* $g(x)$. *Vi sono punti in cui* $g(x)$ *non è derivabile? Se si, quali sono? E perché?*

b) *Per quali valori di* x, $-2 < x < 5$, *la funzione* $f(x)$ *presenta un massimo o un minimo relativo? Si illustri il ragionamento seguito.*

c) *Se* $f(x) = \int_{-2}^{x} g(t)\,dt$, *si determini* $f(4)$ *e* $f(1)$.

d) *Si determinino i punti in cui la funzione* $f(x)$ *ha derivata seconda nulla. Cosa si può dire sul segno di* $f(x)$? *Qual è l'andamento qualitativo di* $f(x)$?

Punto a

Dopo aver trovato le equazioni delle tre circonferenze:

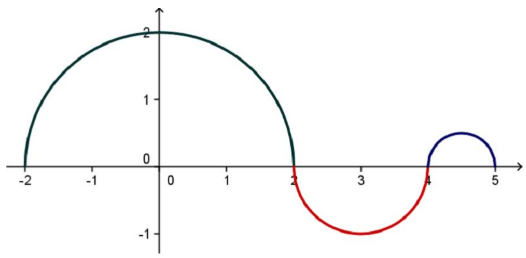
$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \qquad x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0 \qquad x^2 + y^2 - 9x + 20 = 0$$

si ottiene l'espressione analitica di $g(x) = \begin{cases} +\sqrt{4 - x^2} & se \quad -2 \le x \le 2 \\ -\sqrt{-x^2 + 6x - 8} & se \quad 2 < x < 4 \\ +\sqrt{-x^2 + 9x - 20} & se \quad 4 \le x \le 5 \end{cases}$

La funzione $g(x)$ *non è derivabile nei punti:* $x = -2$, $x = 2$, $x = 4$, $x = 5$.

Infatti, essendo la curva costituita da tre semicirconferenze, in tali punti la retta tangente è parallela all'asse y.

Punto b



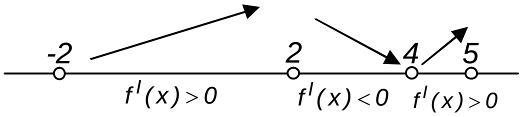
Poiché $g(x)$ *è definita nell'intervallo* $[-2,5]$, *la funzione* $f(x)$, *primitiva di* $g(x)$ *è derivabile nell'intervallo* $(-2,5)$ *e presenta punti di massimo e di minimo relativo nei punti in cui* $f^{I}(x) = g(x) = 0$.

Cioè nei punti $x = 2$ *e* $x = 4$.

Dall'esame del grafico di $g(x)$ *si ricava il segno* $f^{I}(x)$. *Cioè:*

$f^{I}(x) > 0$ *per* $-2 < x < 2$ *e* $4 < x < 5$

$f^{I}(x) < 0$ *per* $2 < x < 4$.



Pertanto:

per $x = 2$ *si ha un massimo relativo* *e* *per* $x = 4$ *si ha un minimo relativo.*

Punto c

Metodo 1

Applicando la formula di integrazione: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \frac{1}{2}\left(a^2 \text{arcsen}\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} \right) + k$ *(*)* *si ha che:*

$$f(1) = \int_{-2}^{1} g(t)\,dt = \int_{-2}^{1} \sqrt{4 - t^2}\ dt = \frac{1}{2}\left[4 \cdot \text{arcsen}\frac{t}{2} + t \cdot \sqrt{4 - t^2} \right]_{-2}^{1} = \left[2 \cdot \text{arcsen}\frac{t}{2} + \frac{t}{2} \cdot \sqrt{4 - t^2} \right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left[\left(2 \cdot \text{arcsen}\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 - 1^2} \right) - \left(2 \cdot \text{arcsen}\frac{-2}{2} - \frac{-2}{2} \cdot \sqrt{4 - (-2)^2} \right) \right] =$$

$$= \left[\left(2 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left(2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) - 2 \cdot 0 \right) \right] == \left[\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi \right] = \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Dimostrazione della formula (*)

L'integrale $\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$ *può essere calcolato per sostituzione:*

Infatti, ponendo: $x = a \cdot \text{sen}\,t$, *con* $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$, *si ha:* $dx = a \cdot \cos t\ dt$ *e* $t = \text{arcsen}\frac{x}{a}$.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \cdot \text{sen}^2 t}\ \cdot a \cdot \cos t\ dt = \int \sqrt{a^2 \cdot \left(1 - \text{sen}^2 t\right)}\ \cdot a \cdot \cos t\ dt = a \int \sqrt{\cos^2 t}\ \cdot a \cdot \cos t\ dt =$$

$= a^2 \int \cos^2 t\ dt = \frac{1}{2} a^2 (t + \text{sen}\,t \cdot \cos t) + k$ *(**). Sostituendo* $t = \text{arcsen}\frac{x}{a}$ *si ottiene la formula :*

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \frac{1}{2} a^2 \left(\text{arcsen}\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right) + k = \frac{1}{2}\left(a^2 \text{arcsen}\frac{x}{a} + a^2\,\frac{x}{a}\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}} \right) + k =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2 \text{arcsen}\frac{x}{a} + a^2\,\frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \right) + k = \frac{1}{2}\left(a^2 \text{arcsen}\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} \right) + k .$$

Dimostrazione della formula (**): $\int \cos^2 t\ dt = \frac{1}{2}(t + sen\, t \cdot \cos t) + k$

Dalla formula di duplicazione del coseno si ha: $\cos 2t = \cos^2 t - sen^2 t = \cos^2 t - (1 - \cos^2 t) = -1 + 2\ \cos^2 t$.

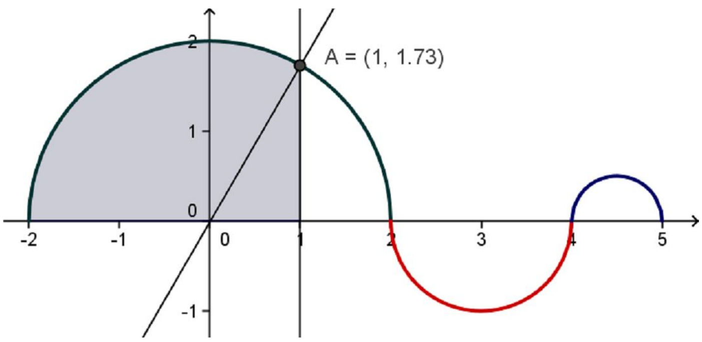
Pertanto dalla formula: $\cos 2t = -1 + 2\ \cos^2 t$ *si ottiene:* $2\ \cos^2 t = 1 + \cos 2t$; $\cos^2 t = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2t)$.

Sostituendo si ha: $\int \cos^2 t\ dt = \int \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{1}{2} \cdot \left[\int 1\, dt\, dt + \int \cos 2t\, dt \right] =$

$= \frac{1}{2} \cdot \left[\int 1\, dt\, dt + \frac{1}{2} \int 2 \cdot \cos 2t\, dt \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[t + \frac{1}{2} sen 2t + k \right. = \frac{1}{2} \cdot \left[t + \frac{1}{2} \cdot 2 sen\, t \cdot \cos t \right] + k = \frac{1}{2} \cdot [\, t + sen\, t \cdot \cos t\,] + k$

Metodo 2

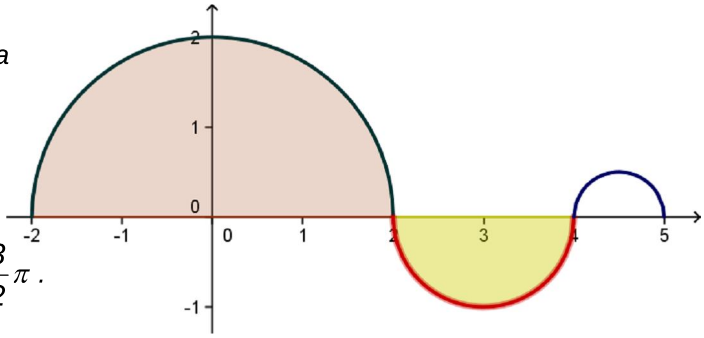
L'integrale $f(1) = \int_{-2}^{1} g(t)\, dt$ *rappresenta l'area della regione colorata, data dalla somma del settore circolare avente angolo al centro* $\alpha = 120°$ *con il triangolo avente base 1 ed altezza* $\sqrt{3}$ *.*



Cioè:

$$f(1) = \int_{-2}^{1} g(t)\, dt = \frac{120}{360} \pi \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{4}{3} \pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'integrale $f(4)=\int_{-2}^{4} g(t)\,dt$ rappresenta la somma algebrica tra le aree delle due semicirconferenze.



Cioè:

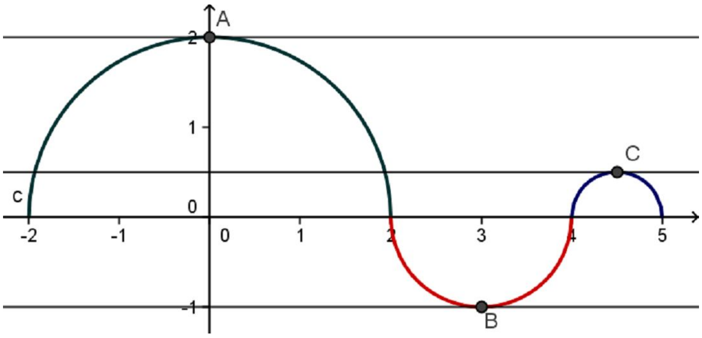
$$f(4)=\int_{-2}^{4} g(t)\,dt = \frac{1}{2}\pi\cdot 2^2-\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2 = 2\pi-\frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi .$$

Punto d

Ricordando che $g(x)=f^{I}(x)$ si ha che: $f^{II}(x)=g^{I}(x)$

Pertanto la funzione $f(x)$ ha derivata seconda nulla nei punti in cui $g^{I}(x)=0$, e cioè nei punti del grafico di $g(x)$ a tangente orizzontale. Essi sono:

$x=0\,,\quad x=3\,,\quad x=\frac{9}{2}$



Ricordando che l'integrale definito rappresenta la somma delle aree comprese tra la curva e l'asse delle x, prese con segno positivo se $g(x)>0$ e con il segno negativo se $g(x)<0$, ed essendo f(x) è la funzione integrale di $g(x)$,

si ha che $f(x)\geq 0$ perché $f(-2)=0$ e le aree nel semipiano positivo superano sempre quelle nel semipiano negativo.

Ricapitolando, la funzione $f(x)$ ha le seguenti caratteristiche:

$f(x)\geq 0 \quad \forall x\in[-2,5]$

in $x=2$ ha un massimo relativo e in $x=4$ si ha un minimo relativo.

ha tre flessi nei punti: $x=0\,,\quad x=3\,,\quad x=\frac{9}{2}$

in $x=-2$ e $x=5$ ha due punti a tangente orizzontale.

Pertanto il grafico qualitativo è sotto riportato.