ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2010

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Questionario

Quesito 1

Sia $p(x)$ un polinomio di grado n. Si dimostri che la sua derivata n-esima è $p^{(n)}(x) = n! \cdot a_n$ dove a_n è il coefficiente di a^n.

Soluzione

Dato il polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x^1 + a_0$ si ha che:

$p^{(1)}(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + (n-2)a_{n-2}x^{n-3} + ... + a_1$

$p^{(2)}(x) = n \cdot (n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)\cdot(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + (n-2)\cdot(n-3)a_{n-2}x^{n-4} + ... + a_2$

$p^{(3)}(x) = n \cdot (n-1)\cdot(n-2)a_n x^{n-3} + (n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)a_{n-1}x^{n-4} + (n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)a_{n-2}x^{n-5} + ... + a_3$

…

…

$p^{(n)}(x) = [n \cdot (n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 3 \cdot 2 \cdot 1]\cdot a_n x^{n-n} = [n \cdot (n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 3 \cdot 2 \cdot 1]\cdot a_n = n! \cdot a_n$.

Quesito 2

Siano $\overset{\Delta}{ABC}$ *un triangolo rettangolo in* A, r *la retta perpendicolare in* B *al piano del triangolo e* P *un punto di* r *distinto da* B. *Si dimostri che i tre triangoli* $\overset{\Delta}{PAB}$, $\overset{\Delta}{PBC}$ *e* $\overset{\Delta}{PAC}$ *sono triangoli rettangoli.*

Soluzione 1

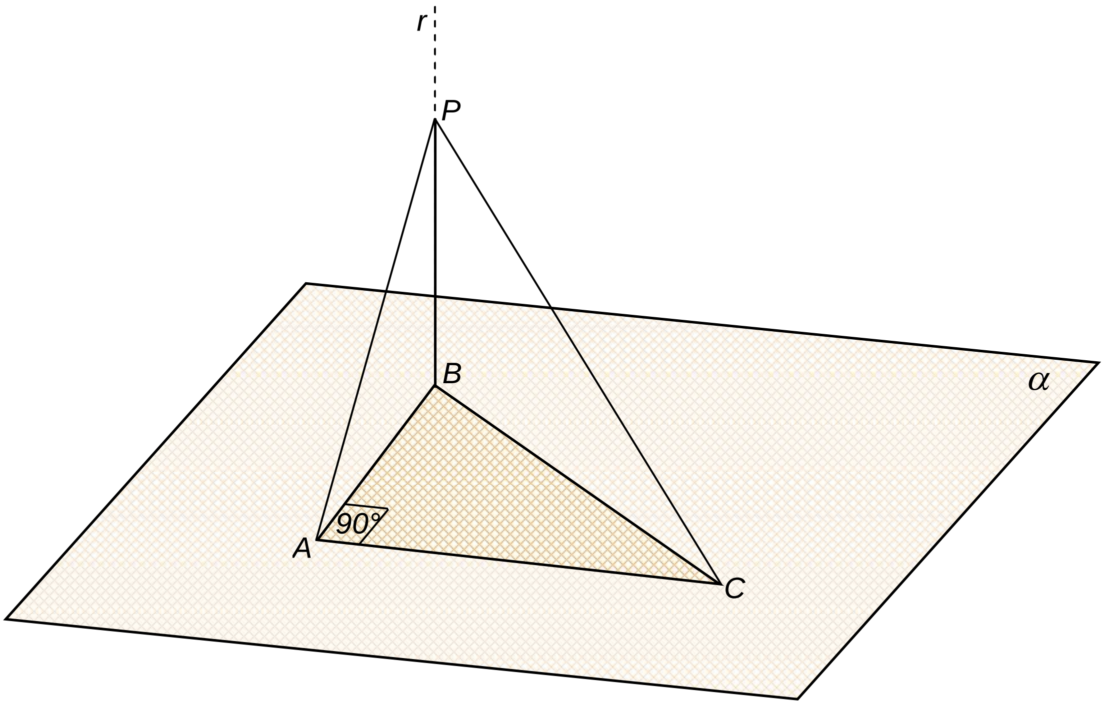
Essendo PB perpendicolare al piano di ABC, PB è perpendicolare a qualsiasi retta passante per B appartenente al piano, quindi PB è perpendicolare ad AB e a CB, ciò vuol dire che i triangoli $\overset{\Delta}{PAB}$ *e* $\overset{\Delta}{PBC}$ *sono triangoli rettangoli in B.*

Applicando il Teorema delle tre perpendicolari:

"Se dal piede di una retta perpendicolare ad un piano si conduce la perpendicolare ad una qualunque retta dello stesso piano, quest'ultima retta è perpendicolare al piano delle prime due",

si dimostra che il triangolo $\overset{\Delta}{PAC}$ *è retto in* A.

Infatti, la retta BA, condotta dal piede B della perpendicolare r al piano α, *è perpendicolare alla retta AC del piano. Pertanto, per il teorema sopraindicato, tale retta AC risulta perpendicolare al piano individuato dalla retta BA e della retta PB. Ciò implica che il triangolo* $\overset{\Delta}{PAC}$ *è rettangolo in A.*



Soluzione 2

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo $\overset{\Delta}{PAB}$ *si ha:* $\overline{PA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BP}^2$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo $\overset{\Delta}{PBC}$ *si ha:* $\overline{PC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BP}^2$

$$\overline{PC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BP}^2 = \overline{BC}^2 + \left(\overline{PA}^2 - \overline{AB}^2\right) = \left(\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2\right) + \overline{PA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{PA}^2 .$$

Pertanto avendo dimostrato che: $\overline{PC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{PA}^2$ $\Rightarrow$ *che il triangolo* $\overset{\Delta}{PAC}$ *è rettangolo in A.*

Quesito 3

Sia r la retta d'equazione $y = ax$ *tangente al grafico di* $y = e^x$. *Qual è la misura in gradi e primi sessagesimali dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?*

Soluzione

Per determinare il punto di intersezione della retta tangente $y = ax$ alla curva $y = e^x$ occorre intersecare le due funzioni e uguagliarne le rispettive derivate prime.

Cioè occorre risolvere il sistema:

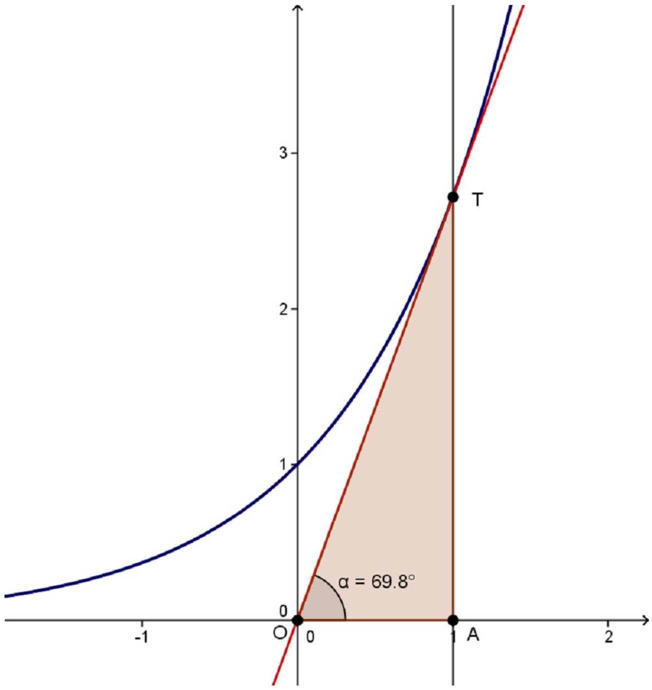
$$\begin{cases} ax = e^x \\ e^x = a \end{cases} \qquad \begin{cases} ax = a \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} ax = e^x \\ e = a \end{cases}$$

Pertanto il punto di intersezione ha coordinate: $T\,(1;\,e)$.

Dal triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{AOT}$ si ha: $tg\,\alpha = \frac{e}{1}$.

Da cui con la calcolatrice si ottiene:

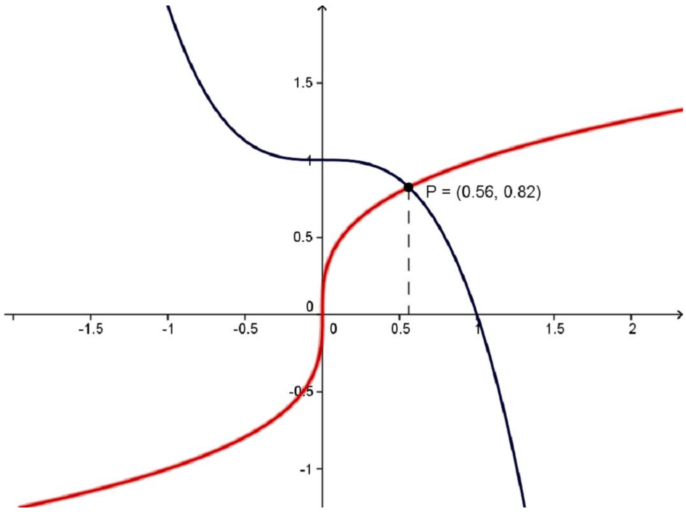
$$\alpha = arctg\; e = 69{,}8° = 69° + 0{,}8° = 69° + (0{,}8 \cdot 60)' = 69°\,48'$$



Quesito 4

Si calcoli con la precisione di due cifre decimali lo zero della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1$. *Come si può essere certi che esiste un unico zero?*

Soluzione



La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1$ è definita in $(-\infty, +\infty)$.

Risolvere l'equazione $\sqrt[3]{x} + x^3 - 1 = 0$

equivale a risolvere il sistema: $\begin{cases} y = \sqrt[3]{x} \\ y = -x^3 + 1 \end{cases}$

Dall'osservazione dei grafici delle due funzioni elementari:

$y = \sqrt[3]{x}$ e $y = -x^3 + 1$

si ricava l'unicità dello zero della funzione. Si deduce inoltre, che tale soluzione è compresa nell'intervallo $(0,1)$

La derivata prima è: $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 3x^2$

$f'(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ perché somma di quantità positive.

Pertanto, per il teorema dell'esistenza e unicità degli zeri, $f(x)$ possiede un unico zero nell'intervallo $(0,1)$.

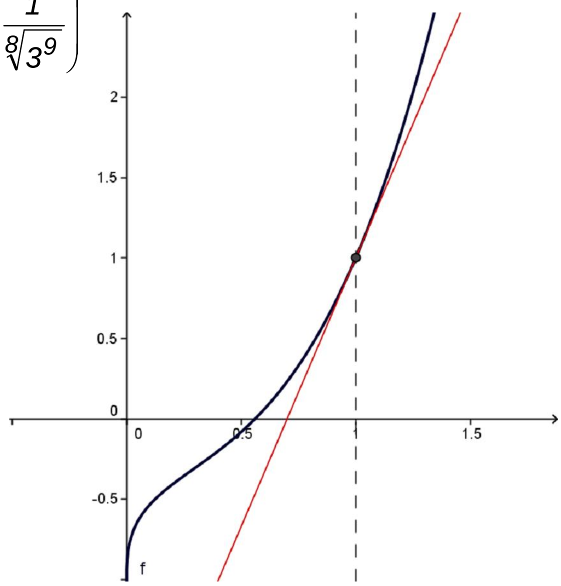
La derivata seconda è: $f''(x) = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} + 6x = \dfrac{-2 + 54x\sqrt[3]{x^5}}{9\sqrt[3]{x^5}} = \dfrac{-2 + 54\sqrt[3]{x^8}}{9\sqrt[3]{x^5}}$

$f''(x) > 0$; $\quad \dfrac{-2 + 54\sqrt[3]{x^8}}{9\sqrt[3]{x^5}} > 0$; $\quad \begin{matrix} -2 + 54\sqrt[3]{x^8} > 0 \\ 9\sqrt[3]{x^5} > 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \sqrt[3]{x^8} > \dfrac{1}{27} \\ x > 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x^8 > \dfrac{1}{3^9} \\ x > 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x > \dfrac{1}{\sqrt[8]{3^9}} \approx 0{,}29 \\ x > 0 \end{matrix}$

Pertanto:

$f''(x) > 0$ nell'intervallo $\left(\dfrac{1}{\sqrt[8]{3^9}},\ 1 \right)$ $\qquad f''(x) < 0$ nell'intervallo $\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt[8]{3^9}} \right)$

Essendo inoltre la derivata prima non definita in $x = 0$, per trovare una approssimazione della radice, utilizziamo il metodo di Newton considerando come punto iniziale $x_0 = 1$.



Con la formula iterativa: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f^I(x_n)}$ *si ottiene:*

METODO DELLE TANGENTI

$h(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1$

$h^I(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 3x^2$

Approssimazione	0,01

x_n		h (x)	$h^I(x)$	$h(x) / h^I(x)$	$x_n - h(x) / h^I(x)$
x_1	1	1,000	3,333	0,300	0,700
x_2	0,700	0,231	1,893	0,122	0,578
x_3	0,578	0,026	1,483	0,018	0,560
x_4	0,560	0,000	1,433	0,000	0,560

Approssimazione	
0,700	continua
0,122	continua
0,018	continua
0,000	STOP

Essendo $|x_3 - x_4| < \dfrac{1}{100}$ l'approssimazione a due cifre decimali del valore cercato è: $\boxed{x = 0{,}56}$.

Quesito 5

Sia G il grafico di una funzione $x \to f(x)$ *con* $x \in R$. *Si illustri in che modo è possibile stabilire se G è simmetrico rispetto alla retta* $x = k$.

Soluzione

Per stabilire se il grafico G di una funzione $x \to f(x)$ è simmetrico rispetto alla retta $x = k$, occorre applicare le equazioni: $\begin{cases} x' = 2k - x \\ y' = y \end{cases}$ e osservare se l'equazione della funzione ottenuta rimane invariata.

Quesito 6

Si trovi l'equazione cartesiana del luogo geometrico descritto dal punto P di coordinate $\left(3\cos t,\ 2\operatorname{sen} t\right)$ *al variare di t,* $0 \le t \le 2\pi$.

Soluzione

Le equazioni parametriche del luogo geometrico: $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\operatorname{sen} t \end{cases}$ *equivalgono alle* $\begin{cases} \dfrac{x}{3} = \cos t \\ \dfrac{y}{2} = \operatorname{sen} t \end{cases}$.

Ricordando la formula fondamentale della goniometria: $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ si ottiene: $\left(\dfrac{x}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 1$.

riscritta nella forma canonica: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ che rappresenta l'equazione di un'ellisse a centro avente semiasse maggiore uguale a 3 e semiasse minore uguale a 2.

Quesito 7

Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenti la risposta.

Soluzione

Anna ha esattamente due figli di cui almeno una femmina.

I casi possibili (coppie ordinate per il primo e secondo figlio) sono tre: M F, F M, F F.

C'è un solo caso favorevole: FF.

Pertanto la probabilità che entrambi i figli siano femmine è 1/3.

Quesito 8

Se $n > 3$ *e* $\binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{n-2}$, $\binom{n}{n-3}$ *sono in progressione aritmetica, qual è il valore di* n *?*

Soluzione

Applicando la definizione di progressione aritmetica si ha:

$$\binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-1} = \binom{n}{n-3} - \binom{n}{n-2}$$

$$2 \cdot \binom{n}{n-2} = \binom{n}{n-3} + \binom{n}{n-1}$$

Applicando la legge delle classi complementari: $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

$$2 \cdot \binom{n}{2} = \binom{n}{3} + \binom{n}{1}$$

$$2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{2 \cdot 3} + n$$

$$n \cdot (n-1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} + n$$

$$n \cdot (n-1) - \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} - n = 0$$

$$6n^2 - 6n - n \cdot (n^2 - 3n + 2) - 6n = 0$$

$$6n^2 - 6n - n^3 + 3n^2 - 2n - 6n = 0$$

$$-n^3 + 9n^2 - 14n = 0$$

$$n^3 - 9n^2 + 14n = 0$$

$$n \cdot (n^2 - 9n + 14) = 0 \quad \left\langle \begin{array}{l} n = 0 \\ n^2 - 9n + 14 = 0 \end{array} \right. \qquad \left\langle \begin{array}{l} n = 0 \\ n_1 = 2 \\ n_1 = 7 \end{array} \right.$$

Dovendo essere $n > 3$ *, la soluzione accettabile è* $n = 7$ *.*

Quesito 9

Si provi che non esiste un triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ *con* $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 2$ *e* $A\hat{B}C = 45°$. *Si provi altresì che se* $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 2$ *e* $A\hat{B}C = 30°$, *allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.*

Soluzione

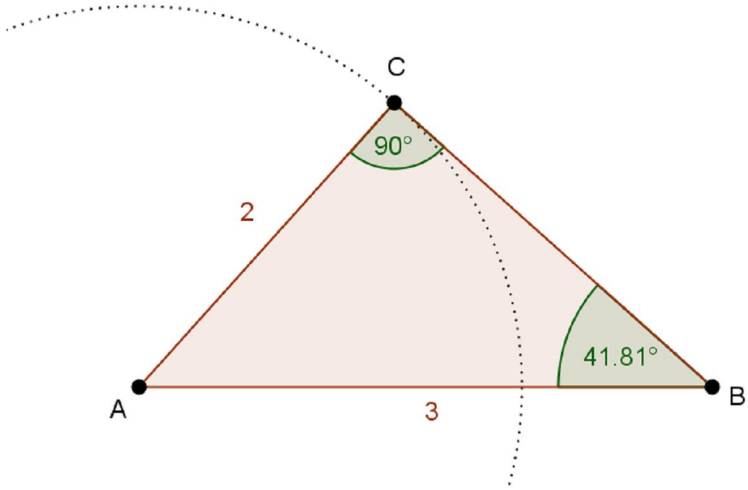
Per il I° Triangolo, applicando il teorema dei seni si ha:

$$\frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}\hat{B}} \; ; \qquad \frac{3}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{2}{\operatorname{sen} 45°} \; ;$$

$2 \cdot \operatorname{sen}\hat{C} = 3 \cdot \operatorname{sen} 45°$ *da cui:*

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{3}{2} \cdot \operatorname{sen} 45° = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \approx 1{,}06 \; ;$$

che è un'equazione impossibile.



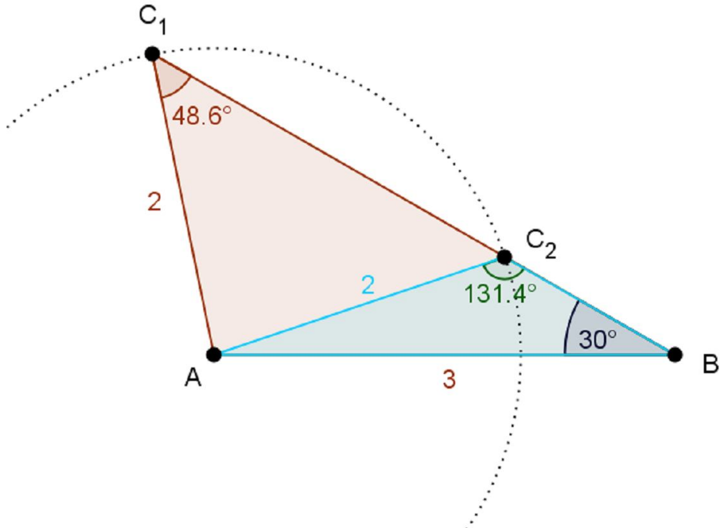
Per il II° Triangolo, applicando il teorema dei seni si ha:

$$\frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}\hat{B}} \; ; \qquad \frac{3}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{2}{\operatorname{sen} 30°} \; ;$$

$2 \cdot \operatorname{sen}\hat{C} = 3 \cdot \operatorname{sen} 30°$ *da cui:*

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{3}{2} \cdot \operatorname{sen} 30° = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

che ammette due soluzioni $\left\langle \begin{array}{l} x = 48{,}59° \\ x = 131{,}41° \end{array} \right.$



Quesito 10

Si consideri la regione R delimitata da $y=\sqrt{x}$ *, dall'asse x e dalla retta* $x=4$ *.*

L'integrale $\int_0^4 2\pi\, x\cdot\left(\sqrt{x}\right)\, dx$ *fornisce il volume del solido:*

- *a) generato da R nella rotazione intorno all'asse x;*
- *b) generato da R nella rotazione intorno all'asse y;*
- *c) di base R le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi di raggio* $\sqrt{x}$ *;*
- *d) nessuno di questi.*

Si motivi esaurientemente la risposta.

Soluzione

Calcoliamo innanzitutto il valore dell'integrale:

$$\int_0^4 2\pi\, x\cdot\left(\sqrt{x}\right)\, dx = 2\pi\cdot\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\, dx = 2\pi\cdot\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = 2\pi\cdot\frac{2}{5}4^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}\pi\sqrt{4^5} = \frac{4}{5}\pi\sqrt{2^{10}} = \frac{4}{5}\pi 2^5 = \frac{128}{5}\pi$$

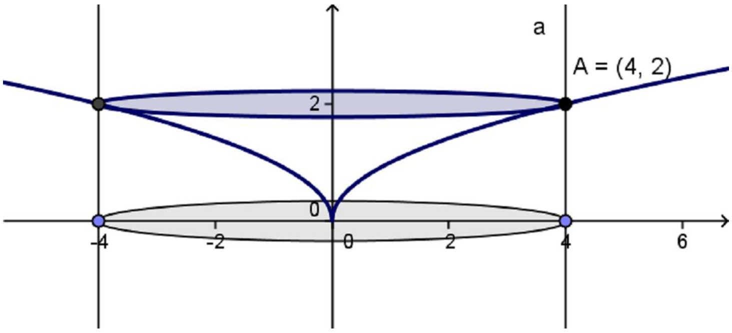
La risposta a) è errata.

Infatti, applicando la formula: $V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\, dx$ *si ottiene:*

$$V=\pi\int_0^4\left[\sqrt{x}\right]^2 dx=\pi\int_0^4 x\, dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4=8\pi$$ *, che non corrisponde al valore dell'integrale proposto.*

La risposta b) è corretta.

Infatti, il volume del solido generato da R nella rotazione intorno all'asse y è dato dalla differenza fra il volume del cilindro con raggio di base 4 e altezza 2 il volume del solido ottenuto facendo ruotare intorno all'asse y il grafico di $x=y^2$ *con* $y\in[0,\ 2]$*.*



$$V=\pi\cdot r^2\cdot h-\pi\int_a^b[f(y)]^2\, dx=\pi\cdot 4^2\cdot 2-\pi\int_0^2\left[y^2\right]^2 dx=32\pi-\pi\int_0^2 y^4\, dx=32\pi-\pi\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^2=$$

$$=32\pi-\pi\left[\frac{2^5}{5}-\frac{0^5}{5}\right]=32\pi-\frac{32}{5}\pi=\frac{160-32}{5}\pi=\frac{128}{5}\pi$$ *, che corrisponde al valore dell'integrale proposto.*

Nota

L'integrale $\int_0^4 2\pi\, x\cdot\left(\sqrt{x}\right)\, dx$ *fornisce il volume del solido generato da R nella rotazione intorno all'asse y, pensando il solido generato dalla superficie laterale di infiniti cilindri di circonferenza di base* $C=2\pi\, x$ *e altezza* $\sqrt{x}$ *.*

La superficie laterale vale: $s(x)=2\pi\, x\sqrt{x}$

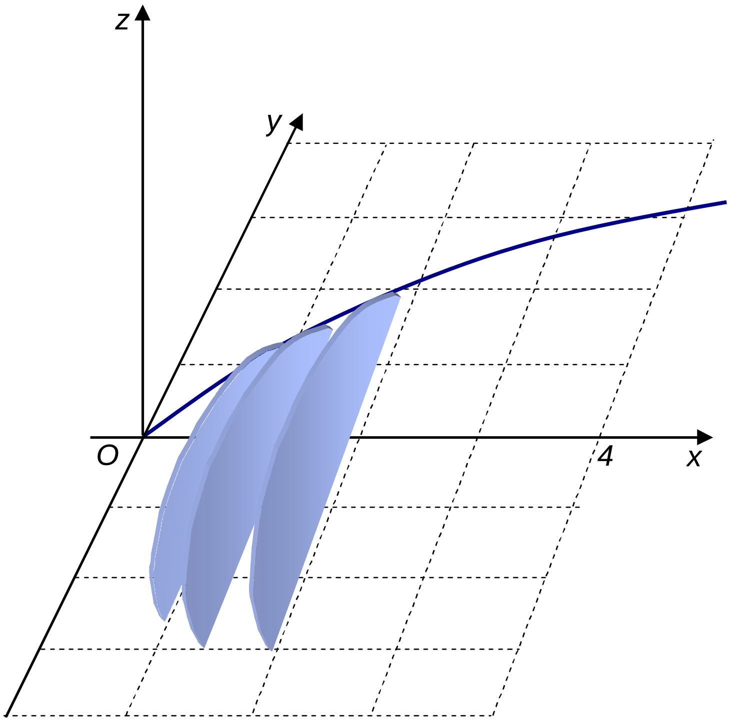
L'elemento "infinitesimo" di volume vale: $dV=2\pi\, x\sqrt{x}\cdot dx$ *.*

Da cui : $V=\int_0^4 2\pi\, x\cdot\sqrt{x}\, dx$ *.*

La risposta c) è errata.

Il volume del solido di base R, le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi di raggio $\sqrt{x}$ *, vale:*

$V = \frac{1}{2}\pi \int_0^4 x\, dx$ *, che non corrisponde al valore dell'integrale proposto.*



Infatti, l'area di un semicerchio di raggio $\sqrt{x}$ *vale:*

$$S = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\sqrt{x}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot x \quad .$$

Applicando la formula: $V = \int_a^b S(x)\, dx$ *si ottiene:*

$$V = \int_0^4 \frac{1}{2}\pi \cdot x\, dx = \frac{1}{2}\pi \int_0^4 x\, dx = \frac{1}{2}\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 4\pi \ ,$$

che non corrisponde al valore dell'integrale proposto.