ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2010

CORSO DI ORDINAMENTO

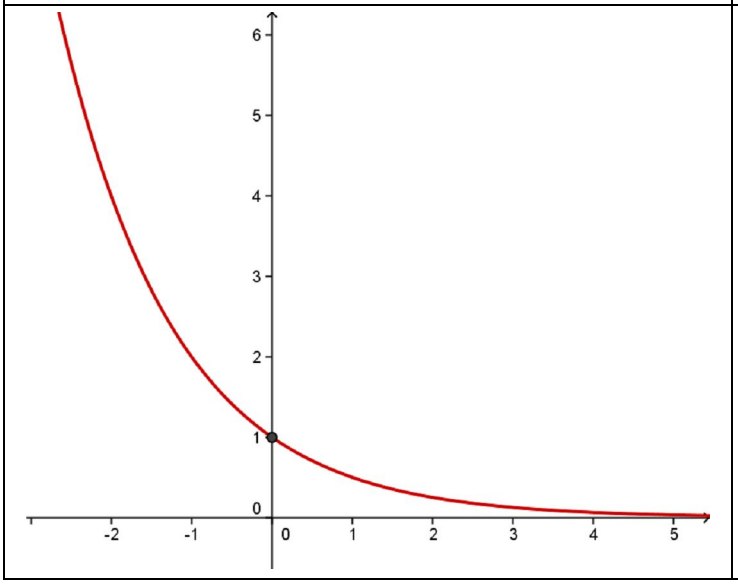
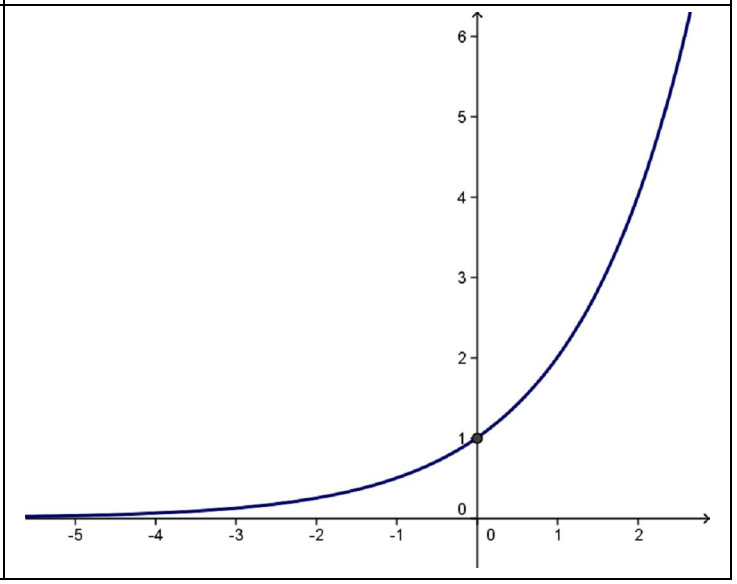
Problema 2

Nel piano, riferito a coordinate cartesiane Oxy, si consideri la funzione f definita da $f(x) = b^x$ $(b > 0,\ b \neq 1)$.

1. *Sia* G_b *il grafico di* $f(x)$ *relativo ad un assegnato valore di* b. *Si illustri come varia* G_b *al variare di* b.
2. *Sia P un punto di* G_b. *La tangente a* G_b *in P e la parallela per P all'asse y intersecano l'asse x rispettivamente in A e in B. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Per quali valori di* b *la lunghezza di AB è uguale a 1 ?*
3. *Sia r la retta passante per O tangente a* G_e *(e = numero di Nepero). Quale è la misura in radianti dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?*
4. *Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse y, da* G_e *e dalla retta d'equazione* $y = e$.

Punto 1

Si tratta della nota funzione esponenziale $f(x) = b^x$.

$0 < b < 1$	$b > 1$
	

Punto 2

Sia $P\left(k;\ b^k\right)$ *un punto di* $f(x)=b^x$, *si ha che:*

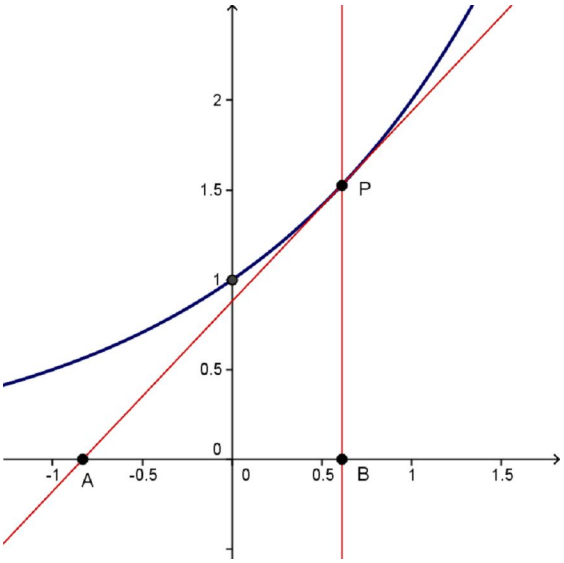
la retta tangente alla $f(x)$ *nel punto* $P\left(k;\ b^k\right)$ *ha equazione:*

$y-b^k=b^k \log b\cdot(x-k)$; *cioè:*

$y=x\cdot b^k \log b-k\cdot b^k \log b+b^k$ *da cui si ricavano le coordinate del punto* A *:*

$$\begin{cases} y=x\cdot b^k \log b-k\cdot b^k \log b+b^k \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{k\cdot b^k \log b-b^k}{b^k \log b}=\dfrac{k\log b-1}{\log b} \\ y=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x\ \ A\left(\frac{k\log b-1}{\log b};\ 0\right).$$



Mentre il punto $B\left(k;\ 0\right)$

La lunghezza del segmento $\overline{AB}=\left|k-\dfrac{k\log b-1}{\log b}\right|=\left|\dfrac{k\log b-k\log b+1}{\log b}\right|=\left|\dfrac{1}{\log b}\right|$ *che rappresenta una lunghezza costante perché indipendente da x.*

La lunghezza del segmento $\overline{AB}=1$ *quando* $\left|\dfrac{1}{\log b}\right|=1$, *cioè:*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\log b}=-1 \\ \dfrac{1}{\log b}=+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=\dfrac{1}{e} \\ b=e \end{cases} \quad .$$

Nota:

La lunghezza del segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ *si chiama* ***sottotangente****. Quindi le funzioni esponenziali hanno la sottotangente costante.*

Punto 3

Per determinare il punto di intersezione della retta tangente $y = m\,x$ *alla curva* $y = e^x$ *occorre intersecare le due funzioni e uguagliarne le rispettive derivate prime.*

Cioè occorre risolvere il sistema:

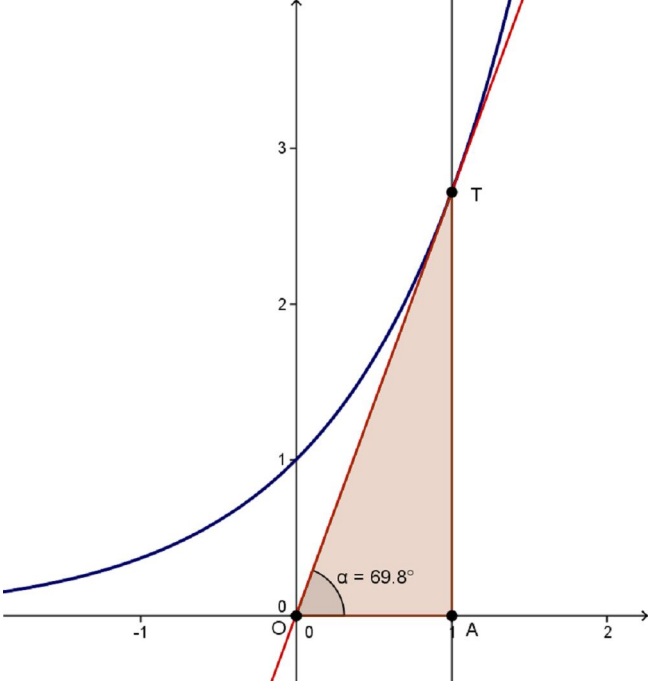
$$\begin{cases} m\,x = e^x \\ e^x = m \end{cases} \quad \begin{cases} mx = m \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ e^1 = m \end{cases}$$

Pertanto il punto di intersezione ha coordinate: $T\,(1;\,e)$.

Dal triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{AOT}$ *si ha:* $tg\,\alpha = \dfrac{e}{1}$.

Da cui si ottiene:

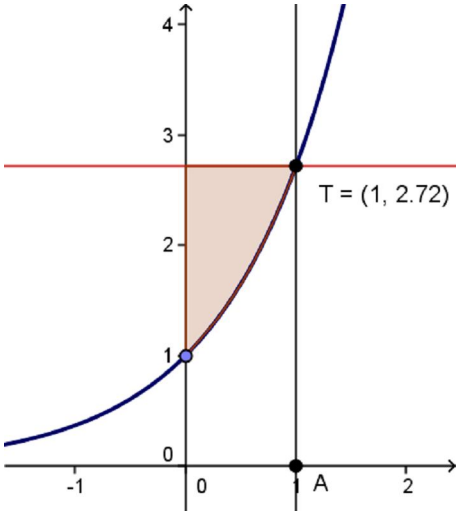
$\alpha = arctg\,e \approx 69{,}8° \approx 1{,}2183$.



Punto 4

Soluzione 1

L'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse y, da G_e e dalla retta d'equazione $y = e$ è data:



$$S = \int_1^e \ln y \, dy = \left[y \cdot \ln y - y \right]_1^e = e \cdot \ln e - e - (1 \ln 1 - 1) = e \cdot 1 - e - (0 - 1) = 1 \; .$$

Soluzione 2

$$S = \int_0^1 \left[e - e^x \right] dx = \left[ex - e^x \right]_0^1 = e \cdot 1 - e^1 - \left(e \cdot 0 - e^0 \right) = e - e - (0 - 1) = 1$$

Soluzione 3

$$S = \overline{OA} \cdot \overline{AT} - \int_0^1 e^x \, dx = 1 \cdot e - \left[e^x \right]_0^1 = e - \left[e^1 - e^0 \right] = e - e + 1 = 1 \; .$$