

Problema 1

Sia $ABCD$ un quadrato di lato 1, P un punto di AB e γ la circonferenza di centro P e raggio AP . Si prenda sul lato BC un punto Q in modo che sia il centro di una circonferenza λ passante per C e tangente esternamente a γ .

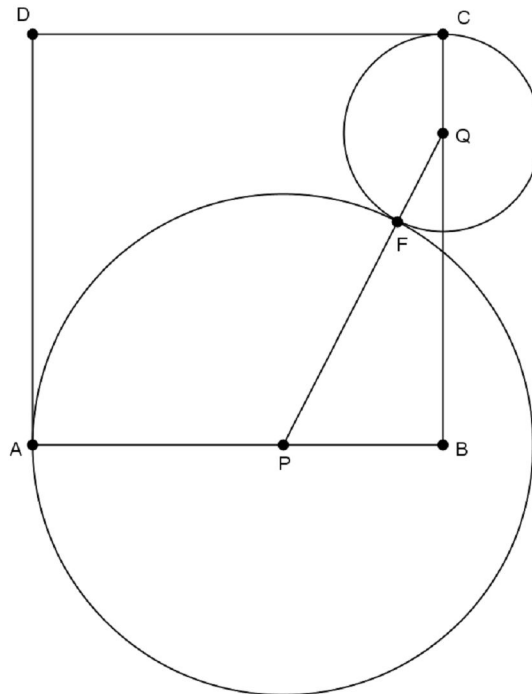
1. Se $\overline{AP} = x$, si provi che il raggio di λ in funzione di x è dato da $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.
2. Riferito il piano ad un sistema di coordinate Oxy , si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste ad x dal problema geometrico, il grafico di $f(x)$. La funzione $f(x)$ è invertibile? Se sì, quale è il grafico della sua inversa?
3. Sia $g(x) = \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$, $x \in \mathbb{R}$; quale è l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $R(0;1)$? E nel punto $S(1;0)$? Cosa si può dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto S ?
4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo ROS , ove l'arco RS appartiene al grafico di $f(x)$ o, indifferentemente, di $g(x)$.

Punto 1

Dal triangolo rettangolo $\triangle BPQ$ si ha: $\overline{PQ}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{BQ}^2$

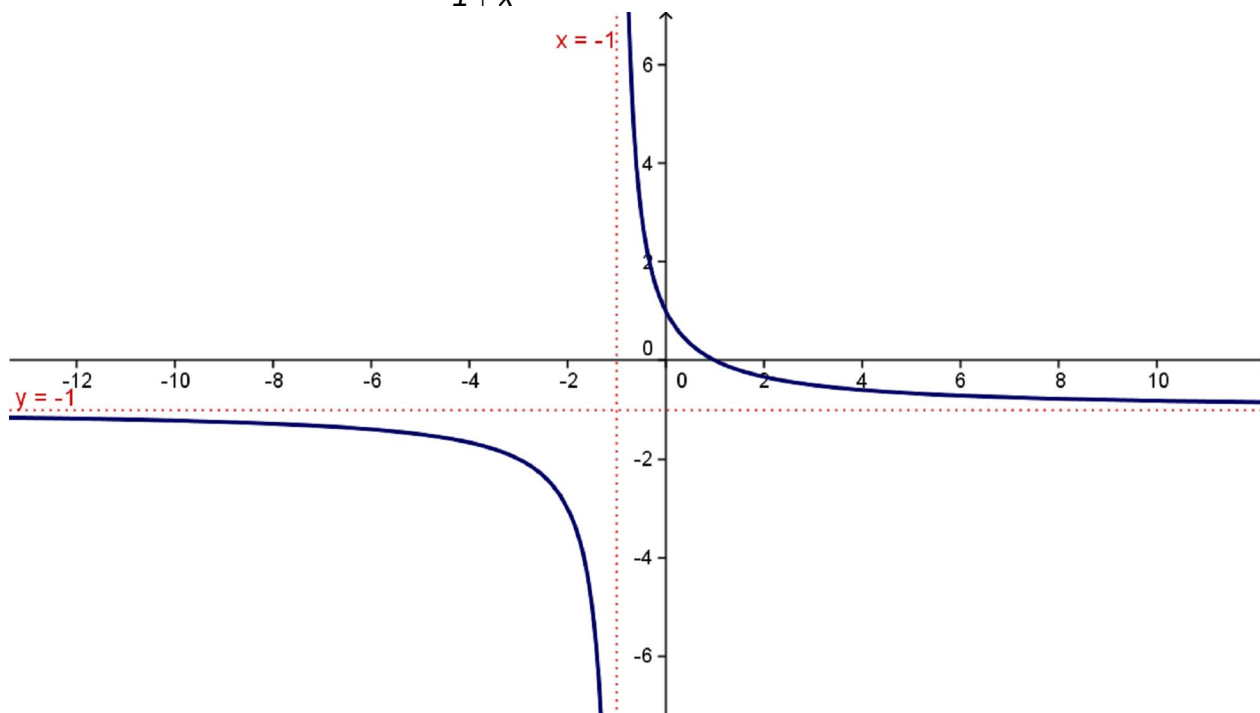
Posto $\overline{AP} = x$ e $\overline{CQ} = y$, si ha:

$$(x+y)^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 \text{ da cui si ottiene: } y = \frac{1-x}{1+x}.$$



Punto 2

Il grafico della funzione omografica: $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ è sotto riportato.



Osservando che la funzione $f(x)$ è strettamente decrescente nel suo dominio, essa è biunivoca e quindi invertibile.

Esplicitando la funzione rispetto alla variabile x , si ottiene l'equazione: $x = \frac{1-y}{1+y}$ cioè: $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

Pertanto il grafico della funzione inversa $f^{-1}(x)$ coincide con quello della funzione $f(x)$.

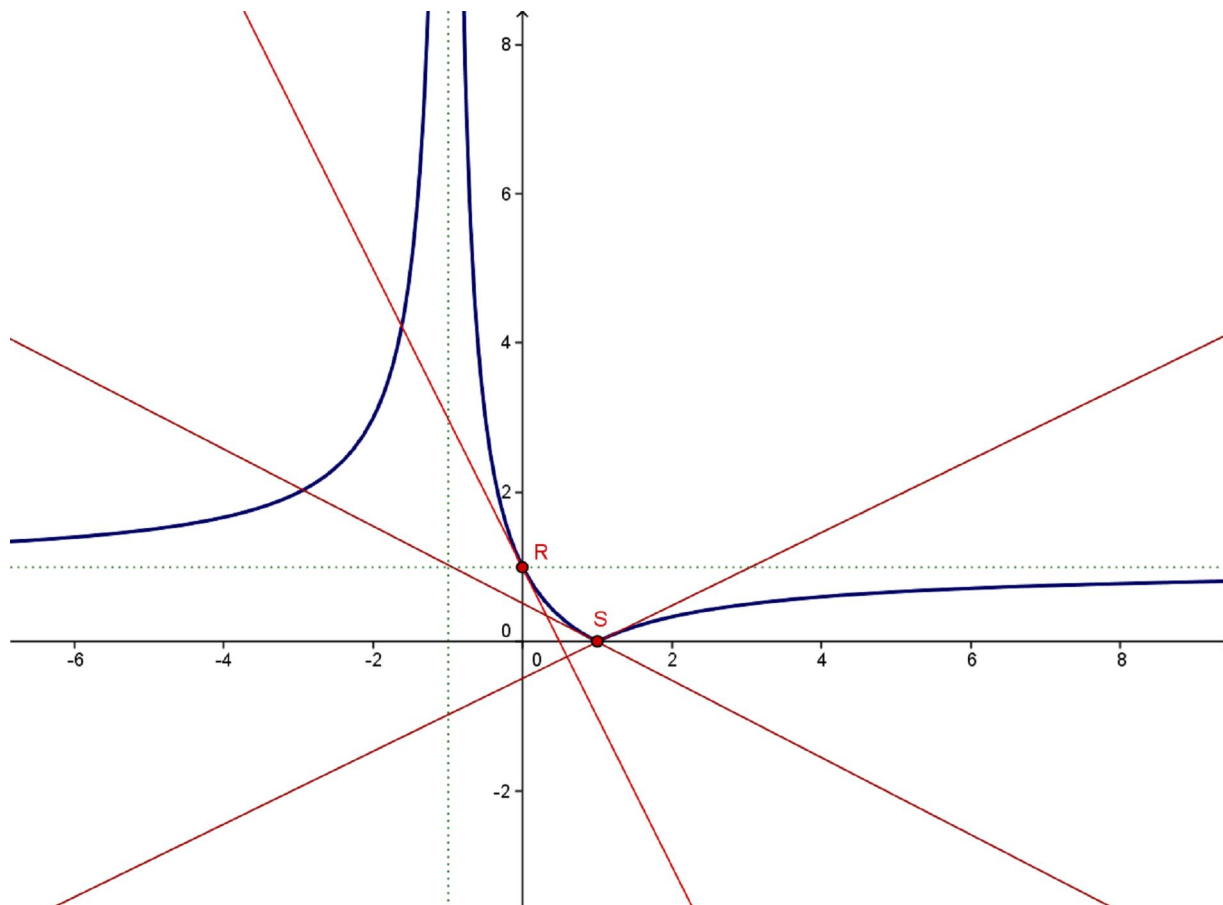
Nota

Dal grafico si nota che la funzione è simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante e quindi coincide con la sua inversa.

Punto 3

$$g(x) = \left| \frac{1-x}{1+x} \right| = \begin{cases} \frac{1-x}{1+x} & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x-1}{1+x} & x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$

Il grafico della funzione omografica $g(x)$ si ottiene da quello di $f(x)$ ribaltando rispetto all'asse x la parte negativa e lasciando inalterata la parte di grafico non negativa.



Per determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $R(0; 1)$, ricordiamo che:

in un intorno di $x = 0$ si ha: $g'(x) = -\frac{2}{(1+x)^2}$; pertanto: $g'(0) = -\frac{2}{(1+0)^2} = -2$.

Quindi l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $R(0; 1)$ è: $y = -2x + 1$.

In $x = 1$ la funzione non è derivabile, e il punto $S(1; 0)$ è un punto angoloso.

Infatti risulta:

in un intorno sinistro di $x = 1$ si ha: $g'_-(x) = -\frac{2}{(1+x)^2}$; pertanto: $g'_-(1) = -\frac{2}{(1+1)^2} = -\frac{1}{2}$

in un intorno destro di $x = 1$ si ha: $g'_+(x) = \frac{2}{(1+x)^2}$; pertanto: $g'_+(1) = \frac{2}{(1+1)^2} = \frac{1}{2}$

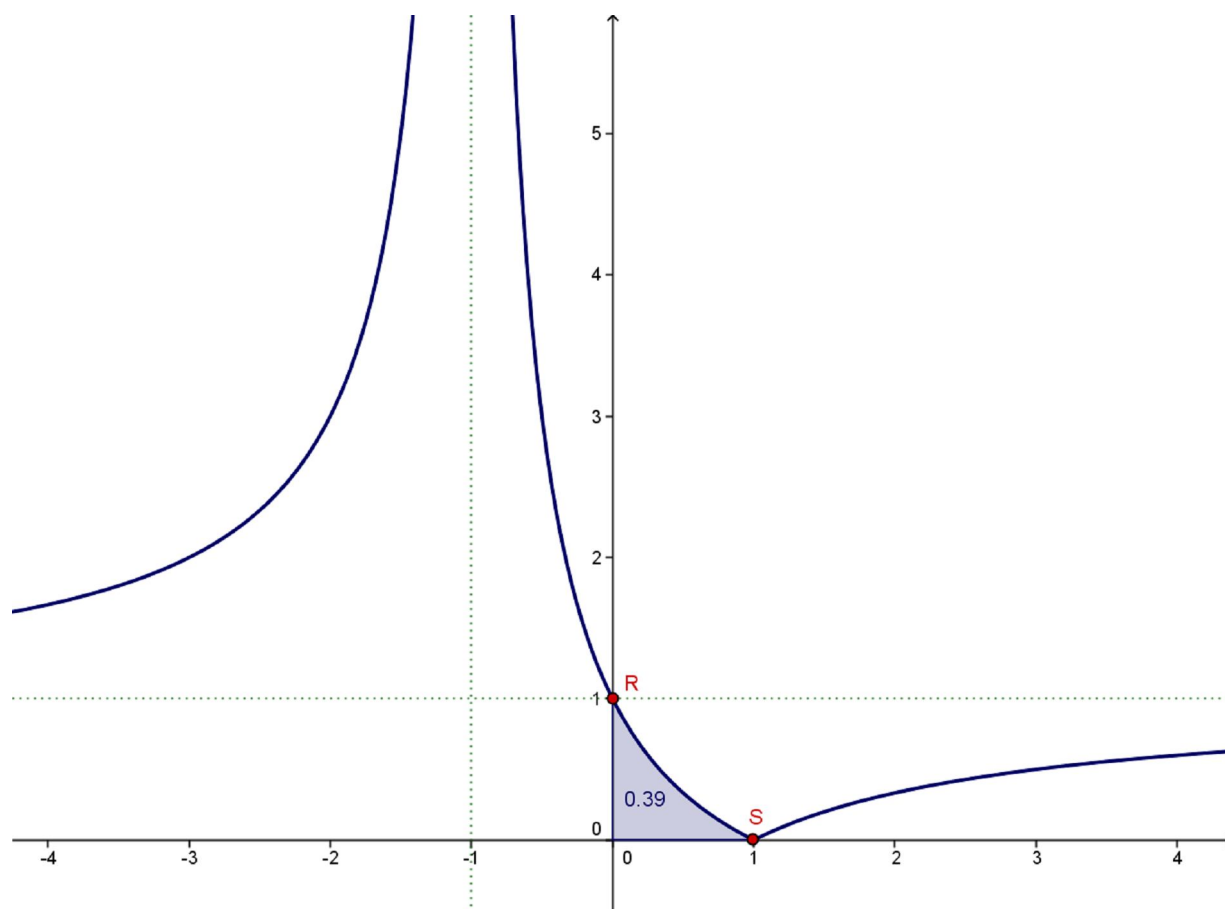
La tangente sinistra ha equazione: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

La tangente destra ha equazione: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Ne segue che la retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $S(1; 0)$ non esiste.

Punto 4

L'area del triangolo mistilineo ROS è data da:



$$\begin{aligned} S_{ROS} &= \int_0^1 \frac{1-x}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{1-x+1-1}{1+x} dx = \int_0^1 \left[\frac{2}{1+x} - \frac{1+x}{1+x} \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{2}{1+x} - 1 \right] dx = [2\log|1+x| - x]_0^1 = \\ &= [2\log|1+1| - 1 - (2\log|1+0| - 0)] = 2\log 2 - 1 = \log 4 - 1 \approx 0,39 . \end{aligned}$$