**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

*Sessione Ordinaria 2009*

**PIANO NAZIONALE INFORMATICA**

# *Problema 2*

*In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy , si consideri la funzione f : R → R definita da* $f(x) = x^3 + kx$*, con k parametro reale.*

*1. Si dica come varia il grafico di f al variare di k ( k positivo, negativo o nullo).*

*2. Sia* $g(x) = x^3$ *e γ il suo grafico. Si dimostri che γ e la retta d'equazione* $y = 1 - x$ *hanno un solo punto P in comune. Si determini l'ascissa di P approssimandola a meno di 0,1 con un metodo iterativo di calcolo.*

*3. Sia D la regione finita del primo quadrante delimitata da γ e dal grafico della funzione inversa di g .*
*Si calcoli l'area di D.*

*4. La regione D è la base di un solido W le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza 12. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di W.*

## *Punto 1*

*Occorre studiare il grafico del fascio di cubiche:* $f(x) = x^3 + kx$.

*1. Dominio*

*Il dominio di* $f(x)$ *è:* $Dom\, f(x) = (-\infty,\ +\infty)$

*2. Simmetrie*

*La curve del fascio presentano una simmetria rispetto all'origine.*

$$f(-x) = -x^3 - kx = -(x^3 kx) = -f(x)$$

*3. Intersezioni con gli assi*

$$\begin{cases} y = x^3 + kx \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad O(0;0)$$

$$\begin{cases} y = x^3 + kx \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 + kx = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \cdot (x^2 + k) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} se\ k \geq 0 & O(0;0) \\ se\ k < 0 & O(0;0);\ A\left(0; -\sqrt{-k}\right);\ B\left(+\sqrt{-k}\,;0\right) \end{cases}$$

*4. Segno di f(x)*

$$f(x) > 0\ ; \quad x^3 + kx > 0\ ; \quad x \cdot (x^2 + k) > 0$$

$$se\ k \geq 0\ ; \quad x > 0$$

$$se\ k < 0\ ; \quad -\sqrt{-k} < x < 0\ ; \quad x > \sqrt{-k}\ .$$

*5. Limiti ed asintoti*

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 + kx) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} (x^3 + kx) = -\infty$$ *non esiste l'asintoto orizzontale.*

*Non esiste nemmeno l'asintoto obliquo perché* $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + kx}{x} = \lim_{x \to +\infty} (x^2 + k) = \pm\infty$.

6. Derivata prima

$f^{I}(x) = 3x^2 + k$

7. Zeri della derivata prima

$$f^{I}(x) = 0\,; \quad 3x^2 + k = 0\,; \quad \Rightarrow \begin{cases} se\ k > 0 & n.s.R. \\ se\ k = 0 & x = 0 \quad soluzione\ doppia \\ se\ k < 0 & x = \mp\sqrt{-\dfrac{k}{3}} \end{cases}$$

8. Segno della derivata prima

$f^{I}(x) > 0\,; \quad 3x^2 + k > 0$

Se $k > 0$ $\quad f^{I}(x) > 0 \quad \forall x \in R \quad f(x)$ è sempre crescente.

Se $k = 0$ $\quad f^{I}(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad f(x)$ è sempre crescente. In $x = 0$ c'è un flesso ascendente a tangente orizzontale.

$$Se\ \ k < 0 \quad \begin{cases} f^{I}(x) > 0 & \left(-\infty, -\sqrt{-\dfrac{k}{3}}\right) \cup \left(-\sqrt{-\dfrac{k}{3}}, +\infty\right) \\ f^{I}(x) < 0 & \left(-\sqrt{-\dfrac{k}{3}}, +-\sqrt{-\dfrac{k}{3}}\right) \end{cases}$$

la funzione

ha un massimo relativo in $x = -\sqrt{-\dfrac{k}{3}}$

e un minimo relativo in $x = +\sqrt{-\dfrac{k}{3}}$

9. Derivata seconda

$f^{II}(x) = 6x$

10. Zeri della derivata seconda

$f^{II}(x) = 0\,; \quad 6x = 0\,; \quad x = 0$

11. Segno della derivata seconda

$f^{II}(x) > 0\,; \quad 6x > 0\,; \quad x > 0$

La curva volge la concavità verso l'alto nell'intervallo: $(0, +\infty)$

La curva volge la concavità verso il basso nell'intervallo: $(-\infty, 0)$

In $x = 0$ c'è un flesso.

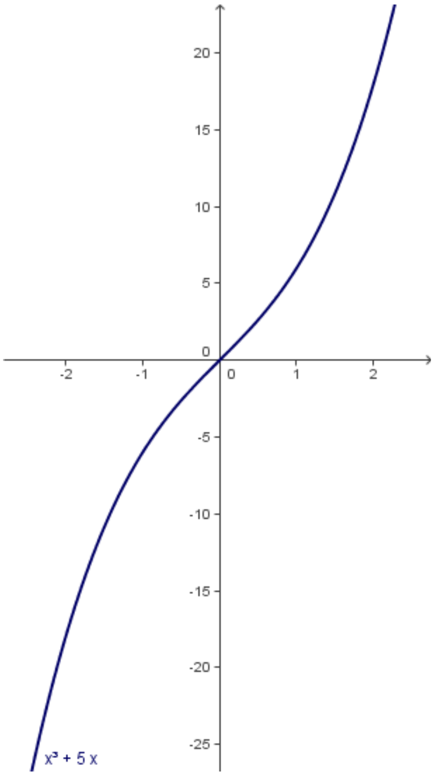
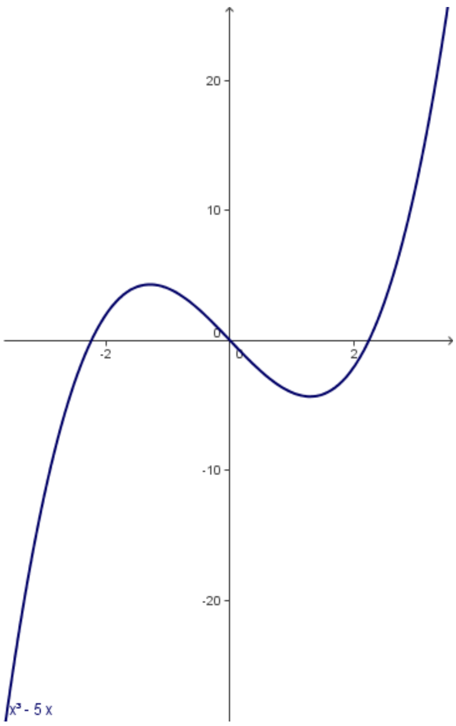
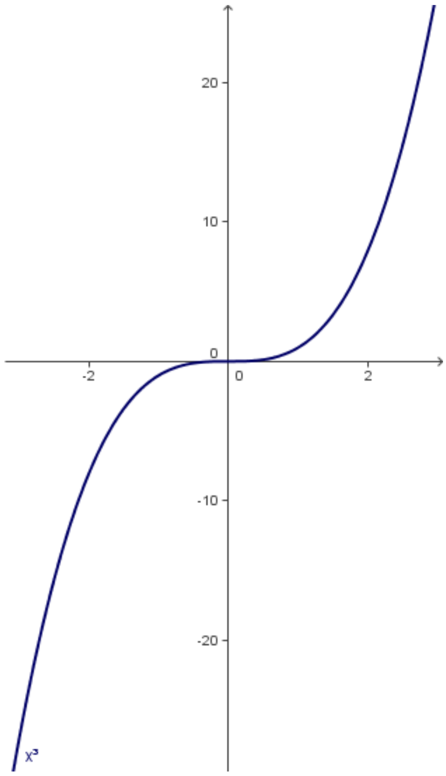
L'ordinata del punto di flesso è: $f(0) = 0$.

12. Massimi e minimi assoluti

La funzione non è limitata ne inferiormente ne superiormente.

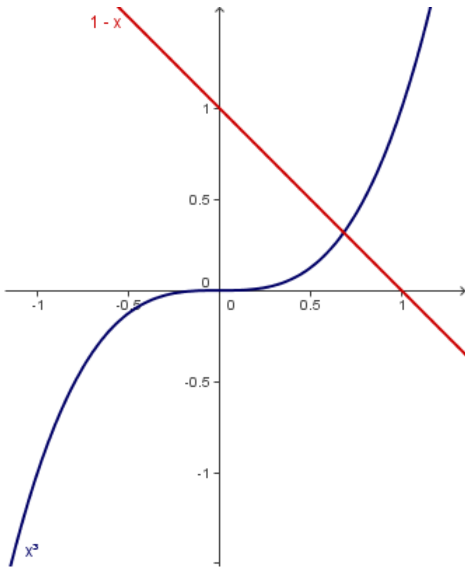
13. Grafico

I grafici sono sotto rappresentati:

| $k > 0$ | $k < 0$ | $k = 0$ |
| --- | --- | --- |
|   |   |   |

## *Punto 2*

*Effettuando la rappresentazione grafica della cubica e della retta si osserva che le due curve hanno un solo punto in comune.*




*Volendo invece dimostrare tale osservazione, occorre studiare il grafico della cubica:* $f(x) = x^3 + x - 1$,

*ottenuta risolvendo il sistema:* $\begin{cases} y = x^3 \\ y = 1 - x \end{cases}$

*e verificare che il suo grafico è una curva che tocca l'asse delle x in un solo punto.*

*La funzione* $h(x) = x^3 + x - 1$ *è continua e derivabile* $\forall x \in R$.

$h(0) = -1$ *mentre* $f(1) = 1$

*Pertanto, per il Teorema dell'esistenza degli zeri, ammette almeno una soluzione nell'intervallo* $(0,1)$.

*Continuando con lo studio della derivata prima:*

$h'(x) = 3x^2 + 1$

$h'(x) = 0$; $3x^2 + 1 = 0$; *la derivata prima non si annulla mai.*

$h'(x) > 0$; $3x^2 + 1 > 0$; *la derivata prima è positiva* $\forall x \in R$.

*Poiché la derivata prima è sempre positiva nel suo dominio, la funzione* $f(x)$ *è strettamente crescente. Pertanto ammette solo una soluzione nell'intervallo* $(0,1)$.

*Utilizzando il metodo si bisezione determiniamo l'ascissa $\alpha$, approssimata a meno di 0,1, del punto di intersezione.*

*Sappiamo che:*

$h(0) = -1$ *mentre* $h(1) = 1$ *il punto medio è:* $M_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$

*Determiniamo l'ordinata del punto medio:*

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1+4-8}{8} = -\frac{3}{8} \approx -0{,}375$$

*Essendo* $h\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ *occorre restringere la ricerca all'intervallo:* $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. *Il punto medio è:* $M_2 = \frac{3}{4} = 0{,}75$

*Determiniamo l'ordinata del punto medio:*

$$h\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{64} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{27+48-64}{64} = \frac{11}{64} \approx 0{,}172$$

*Essendo* $h\left(\frac{3}{4}\right) > 0$ *occorre restringere la ricerca all'intervallo:* $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$. *Il punto medio è:* $M_3 = \frac{5}{8} = 0{,}625$

*Determiniamo l'ordinata del punto medio:*

$$h\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{125}{512} + \frac{5}{8} - 1 = \frac{125+320-512}{512} = -\frac{67}{512} \approx -0{,}13$$

*Essendo* $h\left(\frac{5}{8}\right) < 0$ *occorre restringere la ricerca all'intervallo:* $\left(\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right)$. *Il punto medio è:* $M_4 = \frac{11}{16} = 0{,}6875$

*Determiniamo l'ordinata del punto medio:*

$$h\left(\frac{11}{16}\right) = \frac{1331}{4096} + \frac{11}{16} - 1 = \frac{1331+2816-4096}{4096} = \frac{51}{4096} \approx 0{,}00125$$

*Essendo* $h\left(\frac{11}{16}\right) > 0$ *occorre restringere la ricerca all'intervallo:* $\left(\frac{5}{8}, \frac{11}{16}\right)$. *Il punto medio è:* $M_5 = \frac{21}{32} = 0{,}65625$

*Ma essendo l'ampiezza dell'intervallo* $\left(\frac{5}{8}, \frac{11}{16}\right)$ *uguale a:* $\Delta x = \frac{11}{16} - \frac{5}{8} = \frac{11-10}{16} = \frac{1}{16} = 0{,}0625 < 0{,}1$ *si può arrestare l'iterazione. Pertanto la soluzione cercata, approssimata a meno di* $0{,}1$, *è:* $x = 0{,}6$ .

*Utilizzando Microsoft Excel, si ha il seguente foglio di calcolo:*

## METODO DI BISEZIONE

$$h(x) = x^3 + x - 1$$

| **Approssimazione** | **0,1** |
|---|---|

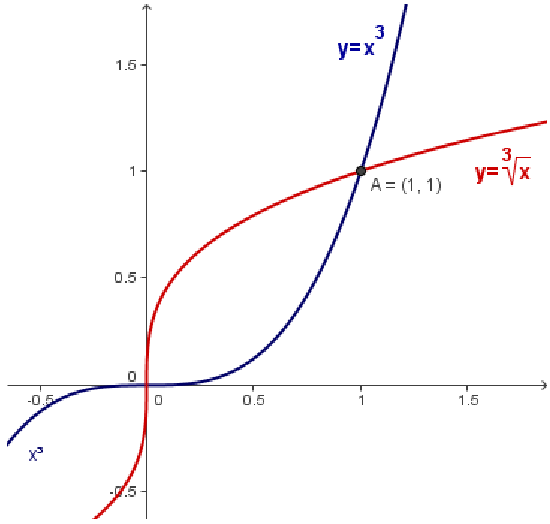
| $x_1$ | $x_2$ | $x_m$ | Segno di h(x) in $x_1$ | Segno di h(x) in x2 | Segno di h(x) in $x_m$ | Δx | Verifica Approssimazione |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0,5 | -1 | 1 | -1 | 1 | continua |
| 0,5 | 1,00 | 0,75 | -1 | 1 | 1 | 0,5 | continua |
| 0,5 | 0,75 | 0,625 | -1 | 1 | -1 | 0,25 | continua |
| 0,625 | 0,75 | 0,6875 | -1 | 1 | 1 | 0,125 | continua |
| 0,625 | 0,6875 | 0,65625 | -1 | 1 | -1 | 0,0625 | STOP |

## Punto 3

*Occorre calcolare i punti di intersezione fra le due curve:*

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = \sqrt[3]{x} \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt[3]{x} = x^3 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = x^9 \\ - \end{cases} \quad x^9 - x = 0\,; \quad x \cdot \left(x^8 - 1\right) = 0\,;$$

$$x \cdot \left(x^4 + 1\right) \cdot \left(x^2 + 1\right) \cdot \left(x^2 - 1\right) = 0\,; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\,(1;1) \\ B\,(-1;-1) \\ O\,(0;0) \end{cases}$$




*L'area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da $\gamma$ e dal grafico della funzione inversa di g è:*

$$S = \int_0^1 \left[\sqrt[3]{x} - x^3\right] dx = \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \left[\frac{3}{4}1^{\frac{4}{3}} - \frac{1^4}{4}\right] = \frac{1}{2}\,.$$

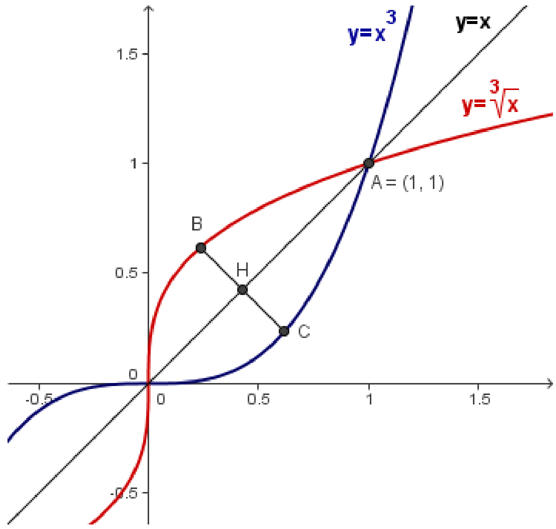
## Punto 4

*Dato che l'altezza della sezione è costante e pari a 12, la sezione di area massima si ha quando la base è massima. Tale base è il segmento BC perpendicolare alla bisettrice del primo e terzo quadrante.*

*Per la simmetria delle due curve rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, il segmento* $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{CH}$.

*Il segmento* $\overline{CH}$ *rappresenta la distanza del punto* $C\left(t; t^3\right)$,

$(con\ 0 < t < 1)$ *dalla retta* $x - y = 0$.




$$\overline{CH} = \frac{\left|a \cdot x_C + b \cdot y_C + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|1 \cdot t - 1 \cdot t^3\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|t - t^3\right|}{\sqrt{2}}$$

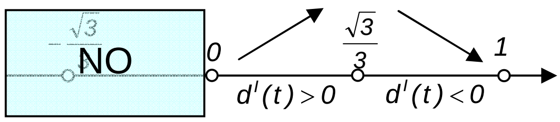
*Essendo:* $0 < t < 1 \quad \Rightarrow \quad t - t^3 > 0 \quad \Rightarrow \quad \left|t - t^3\right| = t - t^3$

*Pertanto:* $\overline{CH} = \dfrac{t - t^3}{\sqrt{2}}$, *mentre* $\overline{BC} = \sqrt{2} \cdot \left(t - t^3\right)$.

*Per trovare il valore di* $t$ *che rende massima la distanza* $\overline{BC}$ *occorre calcolare la derivata prima:*

$d'(t) = \sqrt{2} \cdot \left(1 - 3t^2\right)$. *Essa si annulla in* $t = \mp\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$d'(t) > 0\,; \quad \sqrt{2} \cdot \left(1 - 3t^2\right) > 0\,; \quad 1 - 3t^2 > 0\,; \quad -\dfrac{\sqrt{3}}{3} < t < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$



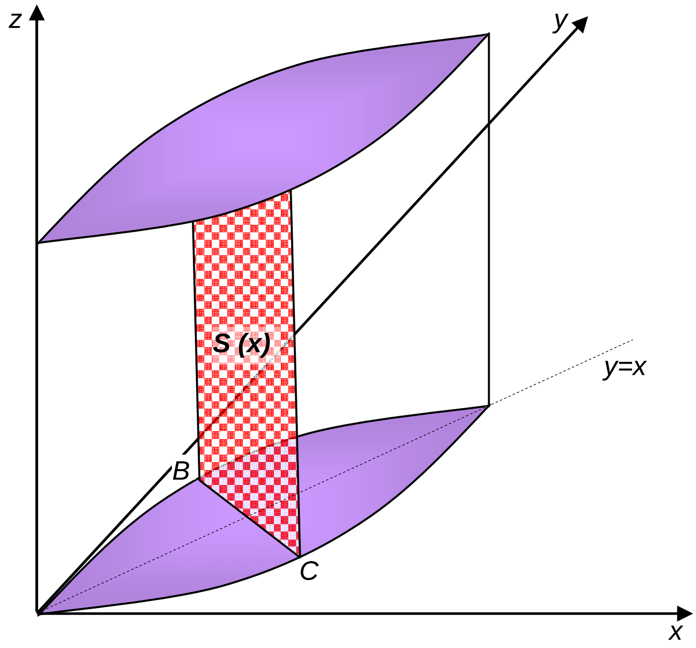

*Pertanto la massima distanza si ha per* $t = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

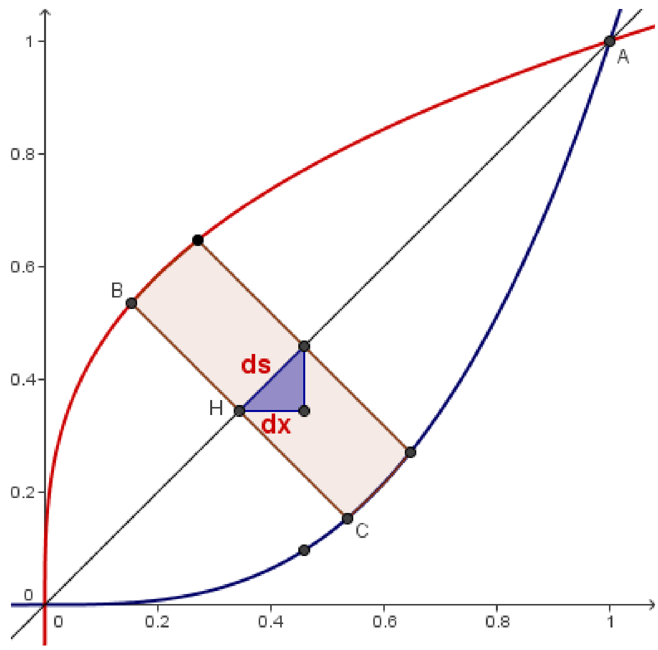
$$\overline{BC} = = \sqrt{2} \cdot \left(t - t^3\right)_{t = \frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{27}}{27}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{27}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9}\right) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{9}\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{2}{9}\sqrt{6}\,.$$

*La sezione di area massima misura* $S = 12 \cdot \dfrac{2}{9}\sqrt{6} = \dfrac{8}{3}\sqrt{6}$.

*Il volume di W , utilizzando il metodo delle fette, è dato dalla somma dei "volumetti" cilindrici aventi per area di base la sezione rettangolare* $S(x) = 12 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(x - x^3\right)$, *e altezza* $ds = \sqrt{2}dx$ *(diagonale del quadrato di lato d x ).*




$$V = \int_0^1 [S(x)]\,dx = \int_0^1 \left[12\sqrt{2} \cdot \left(x - x^3\right)\right] ds = \int_0^1 \left[12\sqrt{2} \cdot \left(x - x^3\right)\right]\sqrt{2}\,dx = 24 \cdot \int_0^1 \left[x - x^3\right] dx =$$

$$= 24 \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 24 \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = 24 \cdot \frac{1}{4} = 6 \ .$$

*Il volume di W poteva essere calcolato, in modo molto semplice, considerando il solido come un cilindro un po' schiacciato:*

$$V = S_{base} \cdot altezza = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \ .$$