ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2009

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Problema 1

Sia f *la funzione definita da*

$$f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)\cdot e^{-x}$$

Dove n *è un intero positivo e* $x\in R$.

1. *Si verifichi che la derivata di* $f(x)$ *è:* $f'(x)=-\frac{x^n}{n!}\cdot e^{-x}$
2. *Si dica se la funzione* f *ammette massimi e minimi (assoluti e relativi) e si provi che, quando* n *è dispari,* $f(x)\le 1$ *per ogni* x *reale.*
3. *Si studi la funzione* g *ottenuta da* f *quando* $n=2$ *e se ne disegni il grafico.*
4. *Si calcoli* $\int_0^2 g(x)dx$ *e se ne dia l'interpretazione geometrica.*

<u>*Punto 1*</u>

$$f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}\right)\cdot e^{-x}$$

Occorre applicare la regola della derivata del prodotto di due funzioni.

$$f'(x)=\left(0+1+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3!}+\frac{4x^3}{4!}+\ldots+\frac{(n-1)x^{n-2}}{(n-1)!}+\frac{nx^{n-1}}{n!}\right)\cdot e^{-x}+\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}\right)\cdot\left(-e^{-x}\right)=$$

$$=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)\cdot e^{-x}+\left(-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}-\ldots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}-\frac{x^n}{n!}\right)\cdot e^{-x}=$$

$$=\left(1+\cancel{x}+\cancel{\frac{x^2}{2!}}+\cancel{\frac{x^3}{3!}}+\cancel{\ldots}+\cancel{\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}}+\cancel{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}\right)\cdot e^{-x}+\left(-1-\cancel{x}-\cancel{\frac{x^2}{2!}}-\cancel{\frac{x^3}{3!}}-\cancel{\ldots}-\cancel{\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}}-\cancel{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}-\frac{x^n}{n!}\right)\cdot e^{-x}=$$

$$=-\frac{x^n}{n!}\cdot e^{-x}\ .$$

Punto 2

$$f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)\cdot e^{-x} \quad = \quad \frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}}{e^x}$$

1. Dominio

Il dominio di $f(x)$ *è:* $(-\infty, +\infty)$

2. Simmetrie

La curva non presenta simmetrie evidenti.

3. Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} y=\dfrac{1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}}{e^x} \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\dfrac{1}{e^0}=1 \\ x=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad A(0;1)$$

4. Limiti ed asintoti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}}{e^x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}=?\right)$$

dopo n *applicazioni del teorema di De L'Hospital si ottiene:*

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{n!}{n!}}{e^x}=0 \quad = \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

$\Rightarrow$ *La retta* $y=0$ *è un asintoto orizzontale a destra per la funzione.*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}}{e^x}=\left(\frac{-\infty+\infty}{0}=?\right)$$

raccogliendo a fattore comune $\dfrac{x^n}{e^x}$ *si ha:*

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^n}{e^x}\cdot\left(\underbrace{\boxed{\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{2!\cdot x^{n-2}}+...+\frac{1}{(n-1)!\cdot x}+\frac{1}{n!}}}_{\frac{1}{n!}}\right)=\begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Poiché se n *è dispari, ad esempio* $n=3$, *si ha:* $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\overset{-\infty}{x^3}}{\underset{0^+}{e^x}}=-\infty$

Mentre se n *è pari, ad esempio* $n=2$, *si ha:* $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\overset{+\infty}{x^2}}{\underset{0^+}{e^x}}=+\infty$

Pertanto, in entrambi i casi, non esiste l'asintoto orizzontale a sinistra.

Verifichiamo se esiste l'asintoto obliquo a sinistra.

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}}{x\cdot e^x} \qquad \text{raccogliendo a fattore comune } \frac{x^n}{x\cdot e^x} \text{ si ha:}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^n}{x\cdot e^x}\cdot\left(\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{2!\cdot x^{n-2}}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!\cdot x}+\frac{1}{n!}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^{n-1}}{e^x}\cdot\left(\underbrace{\boxed{\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{2!\cdot x^{n-2}}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!\cdot x}+\frac{1}{n!}}}_{\frac{1}{n!}}\right) = \; = \begin{cases} -\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ +\infty & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Infatti se n *è pari* $\Rightarrow$ $n-1$ *è dispari, ad esempio se* $n=4$ $\Rightarrow$ $n-1=3$ *e si ha:* $\lim_{x\to-\infty}\frac{\overset{-\infty}{x^3}}{\underset{0^+}{e^x}} = -\infty$

Mentre se n *è dispari* $\Rightarrow$ $n-1$ *è pari, ad esempio se* $n=3$ $\Rightarrow$ $n-1=2$ *e si ha:* $\lim_{x\to-\infty}\frac{\overset{+\infty}{x^2}}{\underset{0^+}{e^x}} = +\infty$

Pertanto, in entrambi i casi, non esiste l'asintoto obliquo a sinistra.

5. Derivata prima

La derivata è: $f'(x) = -\frac{x^n}{n!}\cdot e^{-x}$

6. Zeri della derivata prima

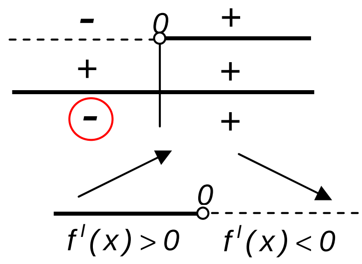
$$f'(x)=0\,; \qquad -\frac{x^n}{n!}\cdot e^{-x}=0\,; \qquad x^n\cdot e^{-x}=0\,; \qquad \begin{cases} x^n=0 & x=0 \\ e^{-x}=0 & \text{mai verificata} \end{cases}$$

7. Segno della derivata prima

$f'(x)>0\,;$ Occorre distinguere due casi:

Se n è un numero dispari

$$-\frac{x^n}{n!}\cdot e^{-x}>0\,; \qquad x^n\cdot e^{-x}<0\,; \qquad \begin{matrix} x^n>0 & x>0 \\ e^{-x}>0 & \forall x\in R \end{matrix}$$



$f(x)$ ha in $x=0$ un punto di max relativo

Essendo $f(0) = \left(1+0+\frac{0^2}{2!}+\ldots+\frac{0^n}{n!}\right)\cdot e^{-0} = 1\cdot e^{-0} = 1$

il punto $A(0;\ 1)$ è un punto di max relativo.

Se n è un numero pari

$$-\frac{x^n}{n!}\cdot e^{-x}>0\,; \qquad -x^n\cdot e^{-x}>0\,; \qquad \begin{matrix} -x^n>0 & \text{mai} \\ e^{-x}>0 & \forall x\in R \end{matrix}$$

La derivata prima è sempre negativa, ad esclusione di $x=0$ dove la derivata prima si annulla.
La funzione è decrescente in tutto il suo dominio, e in $x=0$ c'è un flesso a tangente orizzontale.

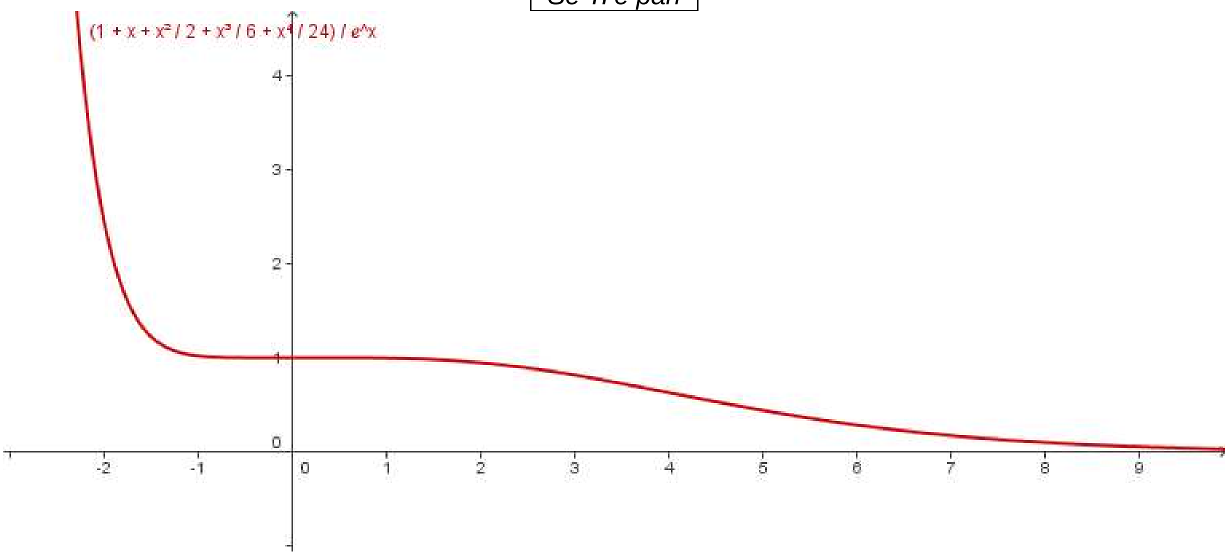
Essendo $f(0) = \left(1+0+\frac{0^2}{2!}+\ldots+\frac{0^n}{n!}\right)\cdot e^{-0} = 1\cdot e^{-0} = 1$

il punto $A\,(0;\ 1)$ è un punto di flesso a tangente orizzontale.

7. Grafico della funzione

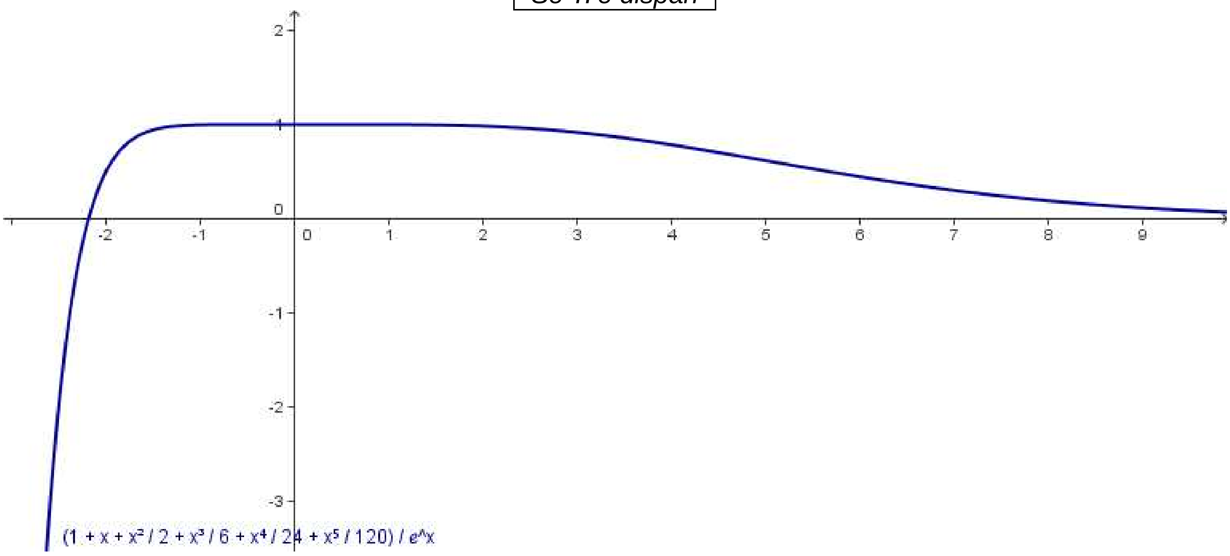
Dalle precedenti informazioni si ricavano i seguenti grafici:

- Se n è pari -



La funzione è limitata inferiormente, ma non è limitata superiormente. L'estremo inferiore è zero. Non ha estremi relativi.

- Se n è dispari -



La funzione non è limitata inferiormente, ma è limitata superiormente.

Il punto di massimo relativo $A\,(0;\ 1)$ è anche punto di massimo assoluto. Pertanto $f(x)\le 1 \quad \forall x\in R$.

Punto 3

Per $n=2$ *si ottiene la funzione:* $g(x)=\dfrac{1+x+\dfrac{x^2}{2}}{e^x}$.

1. Dominio

Il dominio di $g(x)$ è: $Dom\, g(x)=(-\infty,\ +\infty)$

2. Simmetrie

La curva non presenta simmetrie evidenti.

3. Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} y=\dfrac{1+x+\dfrac{x^2}{2}}{e^x} \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\dfrac{1}{e^0}=1 \\ x=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad A\,(0;1)$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{1+x+\dfrac{x^2}{2}}{e^x} \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1+x+\dfrac{x^2}{2}}{e^x}=0 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} 1+x+\dfrac{x^2}{2}=0 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+2x+2=0 \quad n.s.R. \\ - \end{cases}$$

4. Segno di g(x)

$$g(x)>0\,; \qquad \frac{1+x+\dfrac{x^2}{2}}{e^x}>0\,; \qquad \begin{matrix} 1+x+\dfrac{x^2}{2}>0 & \forall x\in R \\ e^x>0 & \forall x\in R \end{matrix} \qquad \text{La funzione è positiva } \forall x\in R\,.$$

5. Limiti ed asintoti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x+\dfrac{x^2}{2}}{e^x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}=?\right)\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{0+1+x}{e^x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}=?\right)\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

La retta $y=0$ è un asintoto orizzontale a destra per la funzione.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x+\dfrac{x^2}{2}}{e^x}=\left(\frac{-\infty+\infty}{0}=?\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x}\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)=+\infty$$

Poiché $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\overbrace{x^2}^{+\infty}}{\underbrace{e^x}_{0^+}}=+\infty$

Pertanto non esiste l'asintoto orizzontale a sinistra.

Verifichiamo se esiste l'asintoto obliquo a sinistra.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x+\dfrac{x^2}{2}}{x\cdot e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x\cdot e^x}\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)=-\infty$$

Pertanto non esiste nemmeno l'asintoto obliquo a sinistra.

6. Derivata prima

La derivata prima è: $g'(x)=-\dfrac{x^2}{2e^x}$

7. Zeri della derivata prima

$$g'(x)=0\,; \qquad -\frac{x^2}{2e^x}=0\,; \qquad x^2=0\,; \qquad x=0$$

8. Segno della derivata prima

$$g'(x) > 0\ ; \quad -\frac{x^2}{2e^x} > 0\ ; \quad -x^2 > 0 \quad \text{mai.}$$

La derivata prima è sempre negativa, ad esclusione di $x = 0$ dove la derivata prima si annulla.

La funzione è decrescente in tutto il suo dominio, e in $x = 0$ c'è un flesso a tangente orizzontale.

Essendo $g(0) = \dfrac{1 + 0 + \frac{0^2}{2}}{e^0} = \dfrac{1}{1} = 1 \quad \Rightarrow$ il punto $A(0;\ 1)$ è un punto di flesso a tangente orizzontale.

9. Derivata seconda

La derivata seconda è:

$$g''(x) = \frac{-2x \cdot 2e^x - \left(-x^2\right) \cdot 2e^x}{\left(2e^x\right)^2} = \frac{-4x \cdot e^x + 2x^2 \cdot e^x}{\left(2e^x\right)^2} = \frac{e^x \cdot \left(-4x + 2x^2\right)}{\left(2e^x\right)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{4e^x} = \frac{x^2 - 2x}{2e^x}$$

10. Zeri della derivata seconda

$$g''(x) = 0\ ; \quad \frac{x^2 - 2x}{2e^x} = 0\ ; \quad x^2 - 2x = 0\ ; \quad x \cdot (x - 2) = 0\ ; \quad \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array} \right.$$

11. Segno della derivata seconda

$$g''(x) > 0\ ; \quad \frac{x^2 - 2x}{2e^x} > 0\ ; \quad x^2 - 2x > 0\ ; \quad x < 0; \quad x > 2$$

La curva volge la concavità verso l'alto per $x < 0; \quad x > 2$

La curva volge la concavità verso il basso per $0 < x < 2$.

In $x = 2$ c'è un flesso.

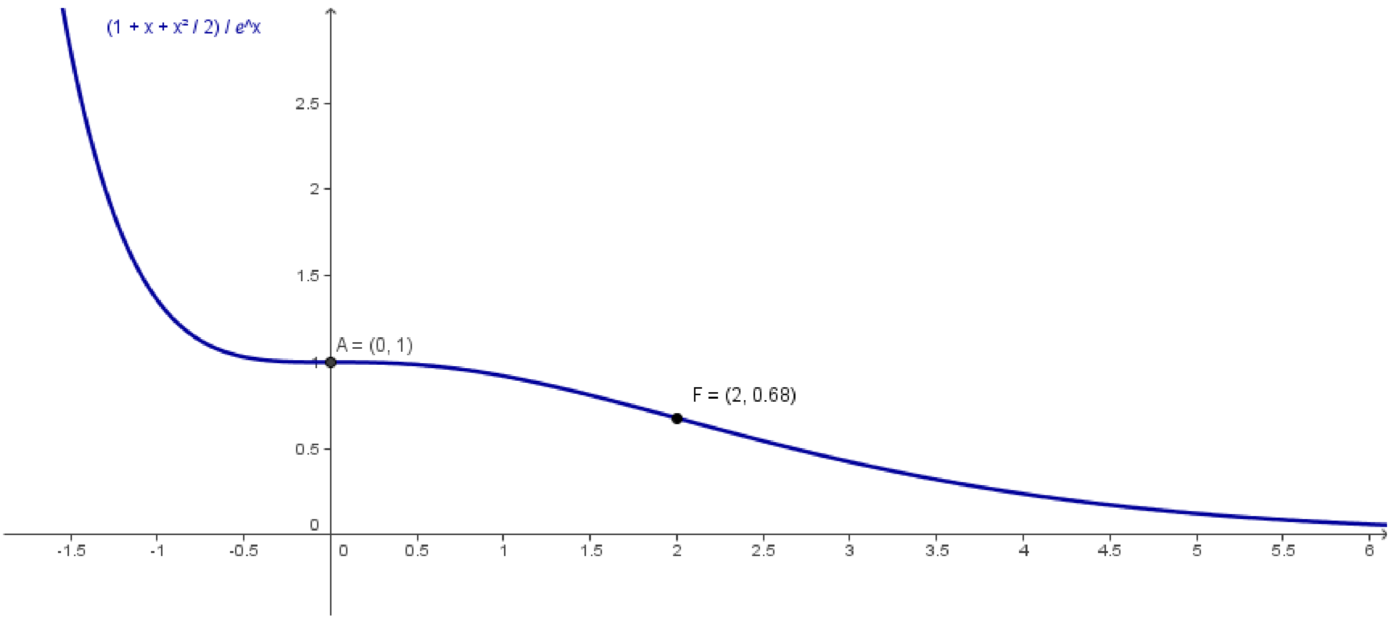
L'ordinata del punto di flesso è: $g(2) = \dfrac{1 + 2 + \frac{2^2}{2}}{e^2} = \dfrac{1 + 2 + 2}{e^2} = \dfrac{5}{e^2} \approx 0{,}68$.

12. Massimi e minimi assoluti

La funzione è limitata inferiormente $y = 0$ ma non è limitata superiormente.
Non ha ne massimo assoluto ne minimo assoluto.

13. Grafico

Il grafico è sotto rappresentato



Punto 4

$$\int_0^2 g(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1+x+\frac{x^2}{2}}{e^x}\,dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{e^x}+\frac{x}{e^x}+\frac{x^2}{2e^x}\right]dx$$

Calcoliamo innanzitutto l'integrale indefinito: $\int \left[\frac{1}{e^x}+\frac{x}{e^x}+\frac{x^2}{2e^x}\right]dx$

$$\int \frac{1}{e^x}dx = \int e^{-x}dx = -e^{-x} + k_1 \ .$$

$$\int \frac{x}{e^x}dx = \int x\cdot e^{-x}dx = -x\cdot e^{-x} - \int -e^{-x}dx = -x\cdot e^{-x} - e^{-x} + k_2 \ .$$

$$\int \frac{x^2}{2e^x}dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{x^2}{e^x}dx = \frac{1}{2}\cdot\left[-x^2e^{-x} - \int 2x\cdot\left(-e^{-x}\right)dx\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[-x^2e^{-x} + 2\cdot\int x\cdot e^{-x}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[-x^2e^{-x} + 2\cdot\left(-x\cdot e^{-x} - e^{-x}\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[-x^2e^{-x} - 2x\cdot e^{-x} - 2e^{-x}\right] = -\frac{1}{2}x^2e^{-x} - x\cdot e^{-x} - e^{-x} + k_3 \ .$$

Pertanto:

$$= \int \left[\frac{1}{e^x}+\frac{x}{e^x}+\frac{x^2}{2e^x}\right]dx = -e^{-x} - x\cdot e^{-x} - e^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x} - x\cdot e^{-x} - e^{-x} + C$$

$$= -3e^{-x} - 2x\cdot e^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x} + C = -e^{-x}\cdot\left(3+2x+\frac{1}{2}x^2\right) + C$$

In definitiva:

$$\int_0^2 \left[\frac{1}{e^x}+\frac{x}{e^x}+\frac{x^2}{2e^x}\right]dx = \left[-e^{-x}\cdot\left(3+2x+\frac{1}{2}x^2\right)\right]_0^2 = \left[-e^{-2}\cdot\left(3+2\cdot 2+\frac{1}{2}2^2\right) + e^{-0}\cdot\left(3+2\cdot 0+\frac{1}{2}0^2\right)\right] =$$

$$= \left[-e^{-2}\cdot(3+4+2) + 1\cdot 3\right] = 3 - \frac{9}{e^2} \ .$$

L'integrale definito $\int_0^2 \left[\frac{1}{e^x}+\frac{x}{e^x}+\frac{x^2}{2e^x}\right]dx$ *rappresenta l'area della regione finita di piano compresa fra la curva*

$g(x) = \frac{1+x+\frac{x^2}{2}}{e^x}$, *l'asse delle x e le rette* $x = 0$ *e* $x = 2$.