ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2009

CORSO DI ORDINAMENTO

Problema 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x) = \log x$ (logaritmo naturale)

1. Sia A il punto d'intersezione con l'asse y della tangente a G_f in un suo punto P. Sia B il punto d'intersezione con l'asse y della parallela per P all'asse x. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x) = \log_a x$ con a reale positivo diverso da 1 ?

2. Sia δ l'inclinazione sull'asse x della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base a è δ = 45° ? E per quale valore di a è δ = 135° ?

3. Sia D la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da G_f e dalla retta d'equazione $y = 1$. Si calcoli l'area di D.

4. Si calcoli il volume del solido generato da D nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione $x = -1$

Punto 1a

La retta tangente a G_f in un suo punto $P\left(t;\, \log t\right)$

ha equazione: $y = \dfrac{x}{t} - 1 + \log t$.

Infatti: $m_t = f'(t) = \dfrac{1}{t}$

$y - y_P = m_t \cdot (x - x_P);\qquad y - \log t = \dfrac{1}{t} \cdot (x - t);$

$y = \dfrac{x}{t} - 1 + \log t$.

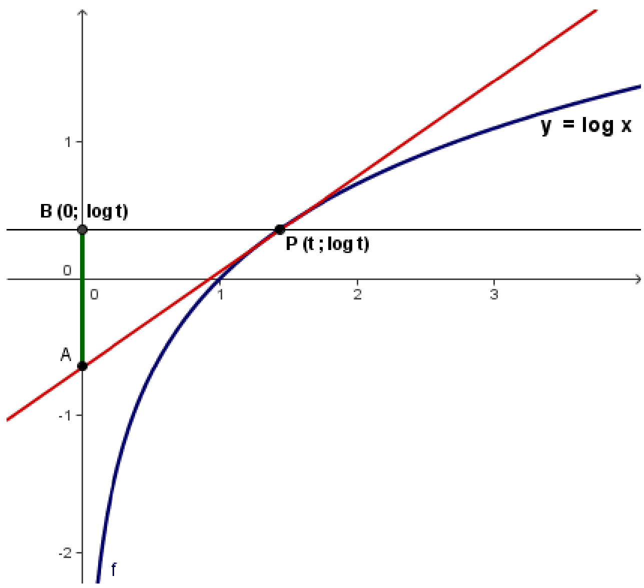
Il punto A ha coordinate: $A\left(0;\ -1 + \log t\right)$.

Infatti: $\begin{cases} y = \dfrac{x}{t} - 1 + \log t \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -1 + \log t \\ x = 0 \end{cases}$

Il punto B ha coordinate: $B\left(0;\ \log t\right)$.

Pertanto il segmento AB ha lunghezza:

$\overline{AB} = \left|y_B - y_A\right| = \left|\log t + 1 - \log t\right| = \left|1\right| = 1$.

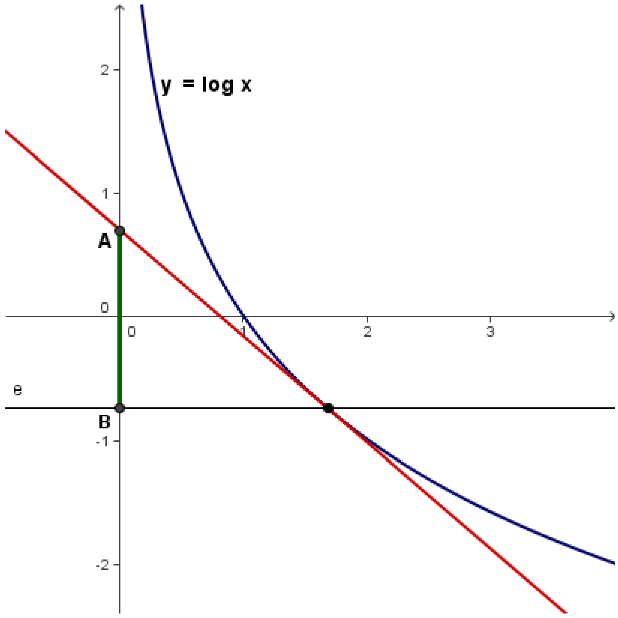


Punto 1b – soluzione 1

Per quanto riguarda la funzione $g(x) = \log_a x$, con a reale positivo diverso da 1, distinguiamo i seguenti due casi:

I° caso $0 < a < 1$

La funzione $g(x) = \log_a x$ è una funzione strettamente decrescente.



La retta tangente a G_g in un suo punto $P\,(t;\, \log_a t)$

ha equazione: $y = \dfrac{\log_a e}{t} x - \log_a e + \log_a t$.

Infatti: $m_t = f'(t) = \dfrac{1}{t} \log_a e$

$y - y_P = m_t \cdot (x - x_P)$; $y - \log_a t = \dfrac{1}{t} \log_a e \cdot (x - t)$;

$y = \dfrac{\log_a e}{t} x - \log_a e + \log_a t$.

Il punto A ha coordinate: $A\,(0;\ \log_a t - \log_a e)$.

Infatti: $\begin{cases} y = \dfrac{\log_a e}{t} x - \log_a e + \log_a t \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -\log_a e + \log_a t \\ x = 0 \end{cases}$

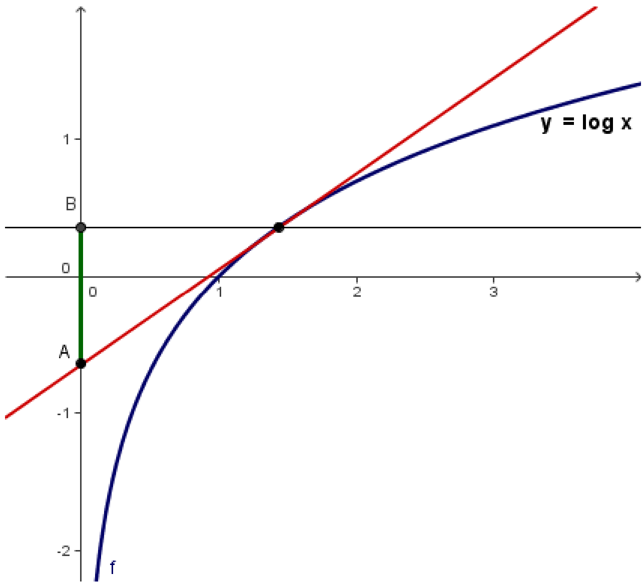
Il punto B ha coordinate: $B\,(0;\ \log_a t)$.

Pertanto il segmento AB ha lunghezza:

$\overline{AB} = |y_B - y_A| = y_A - y_B = \log_a t - \log_a e - \log_a t = -\log_a e$ *(che è una quantità costante).*

II° caso $a > 1$

La funzione $g(x) = \log_a x$ è una funzione strettamente crescente.



La retta tangente a G_g in un suo punto $P\,(t;\, \log_a t)$

ha equazione: $y = \dfrac{\log_a e}{t} x - \log_a e + \log_a t$.

Infatti: $m_t = f'(t) = \dfrac{1}{t} \log_a e$

$y - y_P = m_t \cdot (x - x_P)$; $y - \log_a t = \dfrac{1}{t} \log_a e \cdot (x - t)$;

$y = \dfrac{\log_a e}{t} x - \log_a e + \log_a t$.

Il punto A ha coordinate: $A\,(0;\ \log_a t - \log_a e)$.

Infatti: $\begin{cases} y = \dfrac{\log_a e}{t} x - \log_a e + \log_a t \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -\log_a e + \log_a t \\ x = 0 \end{cases}$

Il punto B ha coordinate: $B\,(0;\ \log_a t)$.

Pertanto il segmento AB ha lunghezza:

$\overline{AB} = |y_B - y_A| = y_B - y_A = \log_a t - \log_a t + \log_a e = \log_a e$ *(che è una quantità costante).*

Punto 1b – soluzione 2

Si può anche non considerare i due casi, è ottenere, con gli stessi calcoli, la misura del segmento AB:

$\overline{AB} = |y_B - y_A| = |\log_a t - \log_a t + \log_a e| = |\log_a e|$ *(che è una quantità costante).*

Punto 2a

La tangente dell'angolo δ rappresenta il coefficiente angolare della tangente alla curva Gg nel suo punto di ascissa 1 :
$m_t = tg\,\delta = tg\,45° = 1$.

Ma il coefficiente angolare della tangente alla curva Gg nel suo punto di ascissa 1 è dato anche dalla derivata prima della funzione $g(x)$ nel punto di ascissa 1, cioè :

$$m_t = f'(1) = \left(\frac{1}{x}\log_a e\right)_{x=1} = \frac{1}{1}\log_a e = \log_a e$$

Uguagliando i due risultati si ottiene: $\log_a e = 1$; $a = e$.

Punto 2b

Mentre per determinare il valore di a per il quale è $\delta = 135°$ si ha:

$m_t = tg\,\delta = tg\,135° = -1$.

Uguagliando i due risultati si ottiene: $\log_a e = -1$; $a = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

Punto 3 – metodo 1

L'area della regione D è data dalla differenza fra l'area del rettangolo $ABOC$ e l'area della regione di piano delimitata dalla curva G_f dall'asse delle x e dalla retta $y = 1$.

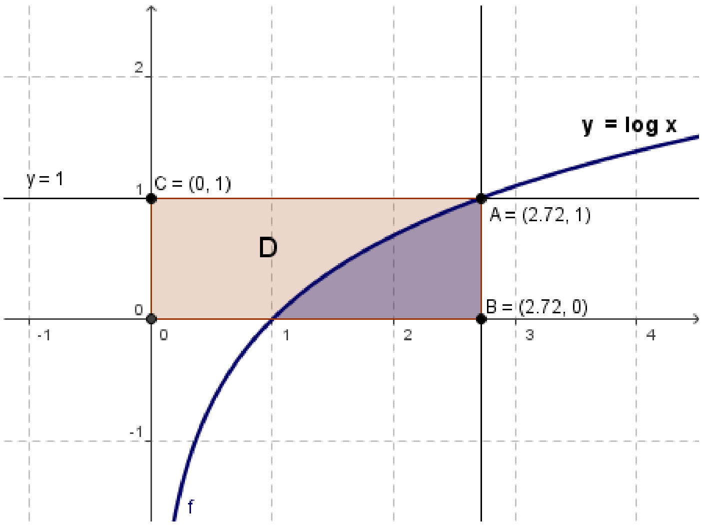
L'area del rettangolo $ABOC$ è:

$$S_{ABOC} = \overline{BO}\cdot\overline{AB} = e\cdot 1 = e.$$

L'area della regione di piano delimitata dalla curva G_f dall'asse delle x e dalla retta $y = 1$ è:

$$S_f = \int_1^e \log x\, dx = \left[x\cdot\log x - x\right]_1^e =$$

$$= e\cdot\log_e e - e - (1\log_e 1 - 1) = e - e - \log_e 1 + 1 = 1 .$$



In definitiva l'area della regione D è: $S = e - 1$.

Punto 3 – metodo 2

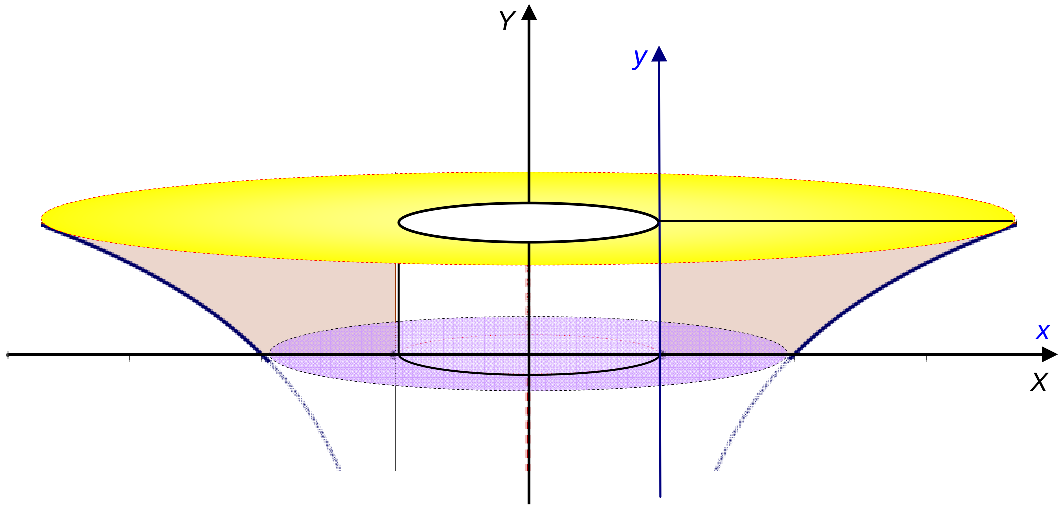
L'area della regione D può essere calcolata anche considerando il dominio D normale rispetto all'asse y.

Ma occorre determinare la funzione inversa della $f(x) = \log x$. Essa è $f^{-1}(y) = e^y$.

$$S_f = \int_0^1 e^x\, dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1 .$$

<u>*Punto 4*</u>

Il volume richiesto si ottiene sottraendo al volume del solido di rotazione il volume del foro a forma di cilindro interno il cui valore è: $V_{Foro} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$.



Per quanto riguarda il volume del solido di rotazione, conviene effettuare una traslazione di assi che porta l'asse y a coincidere con la retta di equazione $x = -1$*:*

Le equazioni della suddetta traslazione sono: $\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y \end{cases}$ *La curva traslata ha equazione:* $Y = \log(X-1)$.

Per calcolare il volume del solido di rotazione attorno all'asse Y *occorre determinare l'inversa della funzione* $Y = \log(X-1)$ *. Essa ha equazione:* $e^Y = X - 1$; $X = 1 + e^Y$.

Pertanto il volume del solido di rotazione è:

$$V_{Solido\ di\ rotazione} = \pi \cdot \int_0^1 \left[f^{-1}(y)\right]^2 dy = \pi \cdot \int_0^1 \left[1 + e^y\right]^2 dy = \pi \cdot \int_0^1 \left[1 + e^{2y} + 2e^y\right] dy =$$

$$= \pi \cdot \left[y + \frac{1}{2}e^{2y} + 2e^y\right]_0^1 = \pi \cdot \left[1 + \frac{1}{2}e^{2\cdot 1} + 2e^1 - \left(0 + \frac{1}{2}e^{2\cdot 0} + 2e^0\right)\right] = \pi \cdot \left[1 + \frac{1}{2}e^2 + 2e - \left(\frac{1}{2} + 2\right)\right] =$$

$$= \pi \cdot \left[1 + \frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{5}{2}\right] = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{3}{2}\right]$$

In definitiva il volume del solido richiesto è:

$$V = V_{Solido\ di\ rotazione} - V_{Foro} = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{3}{2}\right] - \pi = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{3}{2} - 1\right] = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{5}{2}\right] .$$