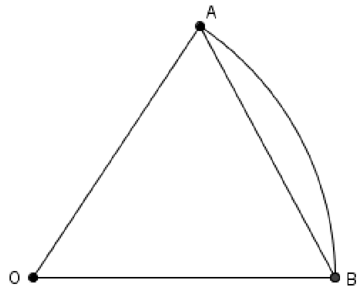
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2009

CORSO DI ORDINAMENTO

Problema 1

È assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in metri e radianti).



1. Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di x, da $S(x)=\frac{1}{2}r^2\cdot(x-\text{sen}\,x)$ *con* $x\in[0,2\pi]$.

2. Si studi come varia S(x) e se ne disegni il grafico (avendo posto r = 1).

3. Si fissi l'area del settore AOB pari a $100\,m^2$. *Si trovi il valore di* r *per il quale è minimo il perimetro di AOB e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).*

4. Sia $r=2$ *e* $x=\frac{\pi}{3}$. *Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.*

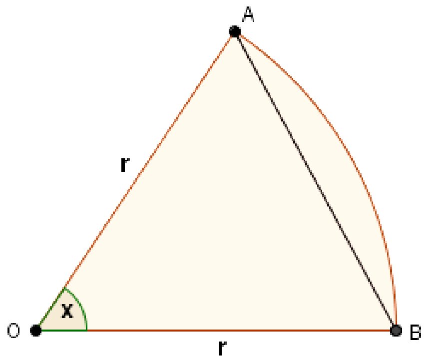
Punto 1

Consideriamo i seguenti due casi:

I° caso - *L'angolo* $x\in[0,\pi]$

L'area S compresa fra l'arco e la corda AB si ottiene come differenza fra l'area del settore circolare e l'area del triangolo:

$$S=S_{\text{Settore circolare }\overset{\triangledown}{OAB}}-S_{\text{Triangolo }\overset{\vartriangle}{OAB}}$$



Applicando la formula: $S=\frac{1}{2}a\,b\,\text{sen}\,\gamma$ *si trova l'area del triangolo:*

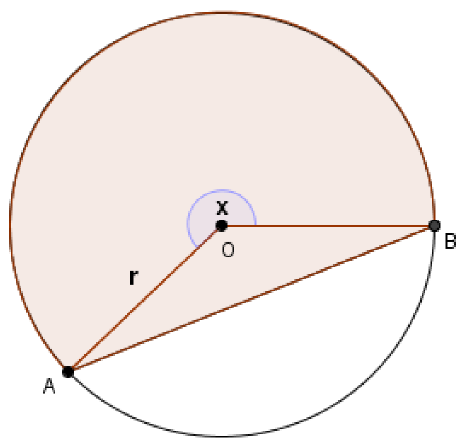
$$S_{\text{Triangolo }\overset{\vartriangle}{OAB}}=\frac{1}{2}r\cdot r\cdot\text{sen}\,x=\frac{1}{2}r^2\cdot\text{sen}\,x\,.$$

Mentre l'area del settore circolare è: $S_{\text{Settore }\overset{\triangledown}{OAB}}=\frac{x}{2\pi}\cdot\pi\cdot r^2=\frac{1}{2}xr^2$.

Pertanto l'area S è data da: $S(x)=\frac{1}{2}r^2\cdot(x-\text{sen}\,x)$ *con* $x\in[0,\pi]$.

II° caso - *L'angolo* $x\in[\pi,2\pi]$

L'area S compresa fra l'arco e la corda AB si ottiene come somma fra l'area del settore circolare e l'area del triangolo:



$$S_{\text{Triangolo }\overset{\vartriangle}{OAB}}=\frac{1}{2}r\cdot r\cdot\text{sen}\,(2\pi-x)=-\frac{1}{2}r^2\cdot\text{sen}\,x\,.$$

Mentre l'area del settore circolare è sempre:

$$S_{\text{Settore circolare }\overset{\triangledown}{OAB}}=\frac{x}{2\pi}\cdot\pi\cdot r^2=\frac{1}{2}xr^2\,.$$

Pertanto: $S(x)=\frac{1}{2}r^2\cdot(x-\text{sen}\,x)$ *con* $x\in[\pi,2\pi]$.

In definitiva l'area S è data da: $S(x)=\frac{1}{2}r^2\cdot(x-\text{sen}\,x)$ *con* $x\in[0,2\pi]$.

Punto 2

Ponendo $r = 1$, la funzione da studiare è: $S(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - \text{sen } x)$ con $x \in [0, 2\pi]$.

1. Dominio

La funzione, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, è continua e derivabile.

$S(0) = \frac{1}{2} \cdot (0 - \text{sen } 0) = 0$ $\qquad\qquad$ $S(2\pi) = \frac{1}{2} \cdot (2\pi - \text{sen } 2\pi) = \pi$.

2. Simmetrie

La funzione, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, presenta una simmetria nel suo punto di flesso $F\left(\pi; \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Intersezioni con gli assi

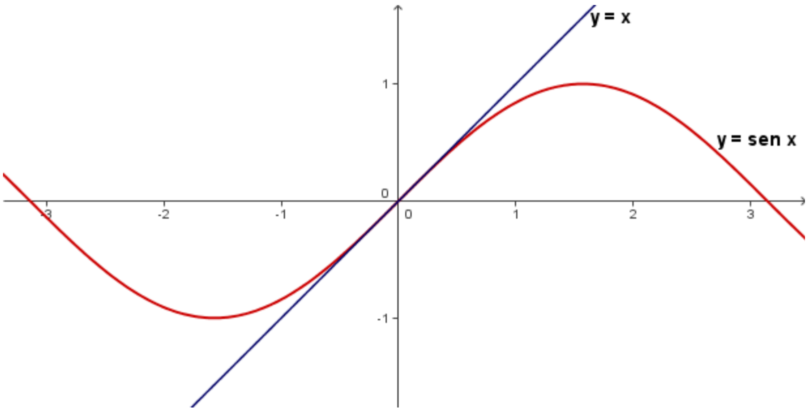
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \cdot (x - \text{sen } x) \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad O(0; 0)$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \cdot (x - \text{sen } x) \\ y = 0 \end{cases} \quad \frac{1}{2} \cdot (x - \text{sen } x) = 0 ;$$

$x - \text{sen } x = 0$.

L'equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} y = \text{sen } x \\ y = x \end{cases}$$



Dal grafico si evince che le due curve si incontrano soltanto nell'origine, dove la retta $y = x$ risulta tangente alla curva.

Infatti:

$D \text{ sen } x = \cos x ;$ $\quad m_0 = \cos 0 = 1 ;$

$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) ;$ $\quad y - 0 = 1 \cdot (x - 0) ;$ $\quad y = x$.

4. Segno di S(x)

$S(x) > 0 ;$ $\quad x - \text{sen } x > 0 ;$ $\quad x > \text{sen } x ;$ dal grafico si evince che: $x > \text{sen } x \quad \forall x \in \left]0, 2\pi\right]$.

5. Limiti ed asintoti

La funzione non ha asintoti di alcun genere.

6. Derivata prima

$$S'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos x)$$

7. Zeri della derivata prima

$S'(x) = 0 ;$ $\quad \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos x) = 0 ;$ $\quad 1 - \cos x = 0 ;$ $\quad \cos x = 1 ;$ $\quad x = 0; \quad x = 2\pi$.

8. Segno della derivata prima

$S'(x) > 0 ;$ $\quad \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos x) > 0 ;$ $\quad 1 - \cos x > 0 ;$ $\quad \cos x < 1 ;$ $\quad \forall x \in \left]0, 2\pi\right[$.

La funzione è strettamente crescente $\forall x \in \left]0, 2\pi\right[$ mentre agli estremi $x = 0$ e $x = 2\pi$ ha la tangente orizzontale .

9. Derivata seconda

$$S''(x) = \frac{1}{2} \text{sen } x$$

10. Zeri della derivata seconda

$$S''(x) = 0\ ; \quad \frac{1}{2} \text{sen } x = 0\ ; \quad \text{sen } x = 0\ ; \quad x = 0; \quad x = \pi; \quad x = 2\pi$$

11. Segno della derivata seconda

$$S''(x) > 0\ ; \quad \frac{1}{2} \text{sen } x > 0\ ; \quad \text{sen } x > 0\ ; \quad 0 < x < \pi\ .$$

La curva volge la concavità verso l'alto nell'intervallo: $(0, \pi)$

La curva volge la concavità verso il basso nell'intervallo: $(\pi, -2\pi)$

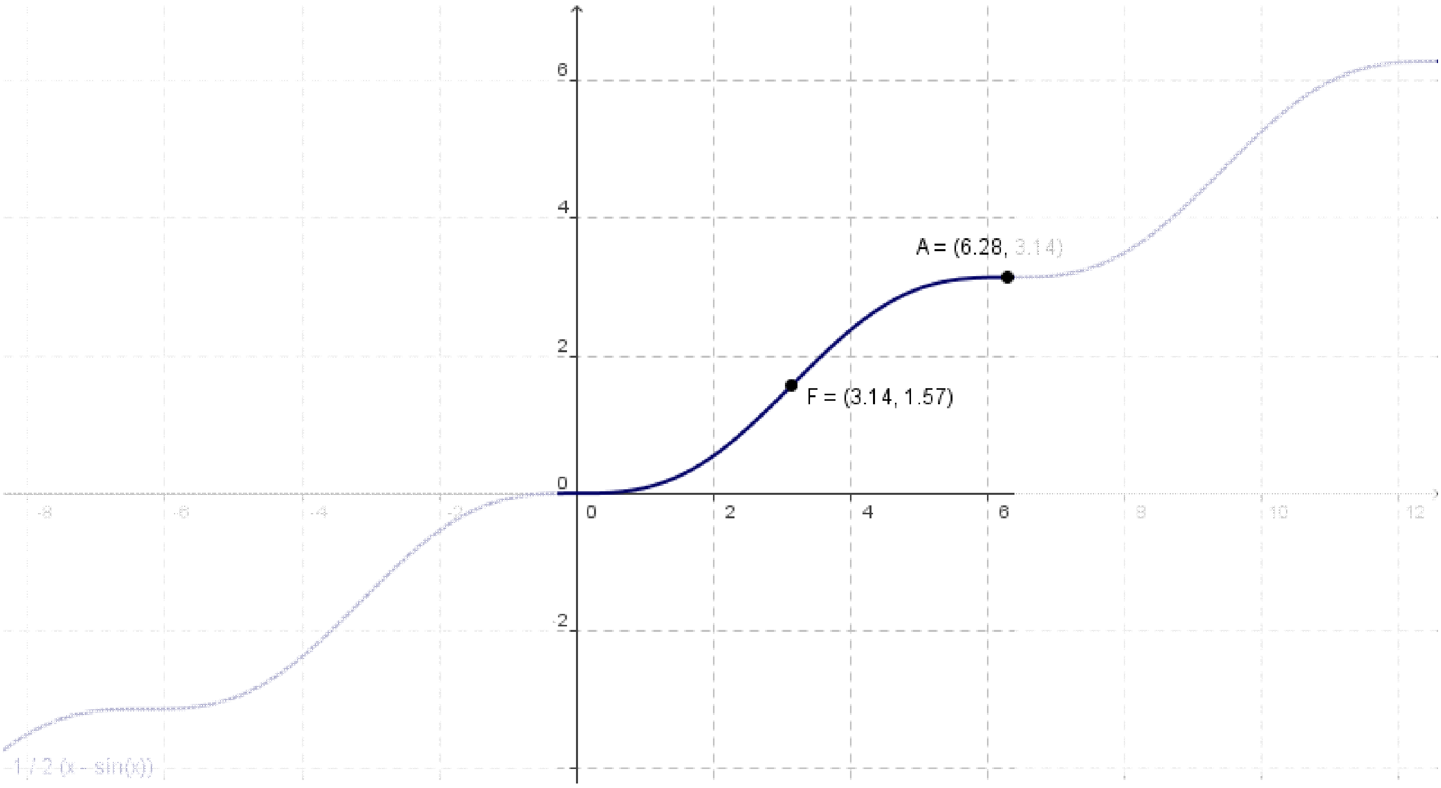
In $x = \pi$ *c'è un flesso a tangente obliqua.*

L'ordinata del punto di flesso è : $S(\pi) = \frac{1}{2} \cdot (\pi - \text{sen } \pi) = \frac{\pi}{2}$.

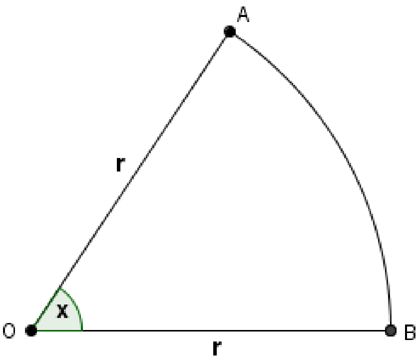
12. Massimi e minimi assoluti

La funzione, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, *è limitata sia inferiormente sia superiormente.*
Il minimo assoluto si ha in: $x = 0$. *L'ordinata del punto di minimo assoluto è:* $y = 0$.
Il massimo assoluto si ha in: $x = 2\pi$. *L'ordinata del punto di massimo assoluto è:* $y = \pi$.

13. Grafico



<u>*Punto 3*</u>



Ponendo $S_{\text{Settore circolare } \overset{\triangledown}{OAB}} = 100\ m^2$ *si ha:* $\frac{1}{2} x r^2 = 100$.

da cui si ottiene: $xr^2 = 200$; $x = \frac{200}{r^2}$.

L'arco $\overset{\frown}{AB} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot C = \frac{x}{2\pi} \cdot 2\pi r = x \cdot r$

Essendo $x = \frac{200}{r^2}$ *si ottiene:* $\overset{\frown}{AB} = x \cdot r = \frac{200}{r^2} \cdot r = \frac{200}{r}$

Il perimetro da rendere minimo ha la seguente espressione: $p(x) = 2r + \frac{200}{r}$ con $r \geq \sqrt{\frac{100}{\pi}}$.

Infatti essendo $x = \frac{200}{r^2}$ *e* $0 \leq x \leq 2\pi$ *si ha:* $\begin{cases} \frac{200}{r^2} \geq 0 \\ \frac{200}{r^2} \leq 2\pi \end{cases}$ *essendo la prima disequazione sempre soddisfatta, occorre risolvere soltanto la seconda:* $\frac{200}{r^2} \leq 2\pi$; $\frac{200 - 2\pi r^2}{r^2} \leq 0$; $\frac{2\pi r^2 - 200}{r^2} \geq 0$; *essendo il denominatore sempre positivo, basta risolvere* $2\pi r^2 - 200 \geq 0$; *da cui si ottiene:* $r \leq -\sqrt{\frac{100}{\pi}}$; $r \geq \sqrt{\frac{100}{\pi}}$.

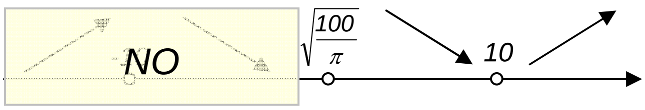
Di queste due, essendo il raggio una quantità positiva, è da considerare soltanto la seconda. Per cui: $r \geq \sqrt{\frac{100}{\pi}}$.

Calcolando la derivata prima si ottiene: $p'(x) = 2 - \frac{200}{r^2} = \frac{2r^2 - 200}{r^2}$.

Essa si annulla per: $\frac{2r^2 - 200}{r^2} = 0$; $2r^2 - 200 = 0$; $r^2 = 100$; $r = \begin{cases} -10 & \text{non accettabile} \\ +10 & \end{cases}$.

Lo studio del segno della derivata prima fornisce il seguente risultato:

$\frac{2r^2 - 200}{r^2} > 0$; $2r^2 - 200 > 0$; $r < -10$; $r > 10$



La funzione risulta decrescente nell'intervallo $\left(\sqrt{\frac{100}{\pi}}, 10\right)$ *e crescente nell'intervallo* $(10, +\infty)$.

Pertanto ha un minimo assoluto per $r = 10\ m$.

il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali è dato da: $x = \frac{200}{r^2} = \frac{200}{10^2} rad = 2\ rad = (2 \cdot 57{,}3)^\circ = 115^\circ$.

<u>*Metodo 2*</u>

Il problema poteva essere risolto anche per via elementare:

Il perimetro $p(x) = 2r + \frac{200}{r}$ *è la somma di due quantità positive.*

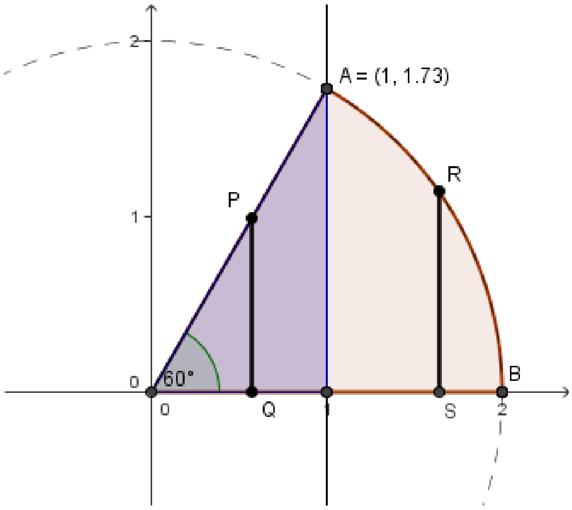
Il cui prodotto $2r \cdot \frac{200}{r} = 400$ *è costante.*

La funzione perimetro, in tal caso, è minima quando i due addendi sono uguali, cioè: $2r = \frac{200}{r}$.

Da cui si ottiene: $2r^2 = 200$; $r = \mp 10$. *Scartando la soluzione negativa si ritrova il valore* $r = 10\ m$.

Punto 4

Considerando un opportuno sistema di riferimento, con l'origine coincidente con il centro O del settore circolare e il punto B in $B(2;0)$. Si ha che il punto A ha coordinate: $A(1;\sqrt{3})$.



Il volume è dato dalla somma dei due volumi dei due solidi che vengono a determinarsi nei due intervalli: $[0,1]$ e $[1,2]$.

La retta OA ha equazione $y=\sqrt{3}\,x$

e l'arco $\overset{\frown}{AB}$ ha equazione: $y=\sqrt{4-x^2}$.

Infatti $\overset{\frown}{AB}$ è un arco appartenente alla circonferenza: $x^2+y^2=4$.

Pertanto il lato $\overline{PQ}$ del quadrato appartenente allo intervallo $[0,1]$ misura: $\overline{PQ} = \sqrt{3}\ x$.

Mentre il lato $\overline{RS}$ del quadrato appartenente allo intervallo $[1,2]$ misura: $\overline{RS}=\sqrt{4-x^2}$.

In definitiva il volume del solido W è:

$$V = \int_0^1 \left(\sqrt{3}\,x\right)dx + \int_1^2 \left(\sqrt{4-x^2}\right)dx = \int_0^1 3x^2\,dx + \int_1^2 \left(4-x^2\right)dx = \left[x^3\right]_0^1 + \left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

$$= 1+\left[8-\frac{8}{3}-\left(4-\frac{1}{3}\right)\right] = 1+8-\frac{8}{3}-4+\frac{1}{3} = 5-\frac{7}{3} = \frac{5-7}{3} = \frac{8}{3}\ .$$