

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Quesito 5

Nel piano riferito a coordinate cartesiane (x, y) si dica qual è l'insieme dei punti per i quali risulta $y^2 - x^3 > 0$

Soluzione

La disequazione $y^2 - x^3 > 0$ diventa $y^2 > x^3$.

Distinguiamo i seguenti casi:

Se $x < 0$ la disuguaglianza è sempre verificata

Se $x = 0$ la disuguaglianza è verificata per $y \neq 0$

Se $x > 0$ la disuguaglianza è verificata per $y < -\sqrt{x^3}$ ∨ $y > \sqrt{x^3}$

Tracciamo il grafico di $y = \sqrt{x^3}$. Il suo dominio è: $[0, +\infty)$.

La funzione è sempre positiva nel suo dominio.

Inoltre $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3} = +\infty$.

La derivata prima è: $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

$f'(x) = 0$ per $x = 0$

$f'(x) > 0$ per $x > 0$

La derivata seconda è:

$f''(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{4\sqrt{x}}$.

$f''(x) = 0$ mai

$f''(x) > 0$ per $x > 0$

Pertanto il grafico è il seguente:

Il grafico della funzione: $y = -\sqrt{x^3}$ è il simmetrico rispetto all'asse x del grafico della funzione $y = \sqrt{x^3}$.

Per determinare l'insieme dei punti per i quali risulta: $y^2 - x^3 > 0$ basta verificare, con qualche prova, quale delle due porzioni di piano verifica la disuguaglianza.

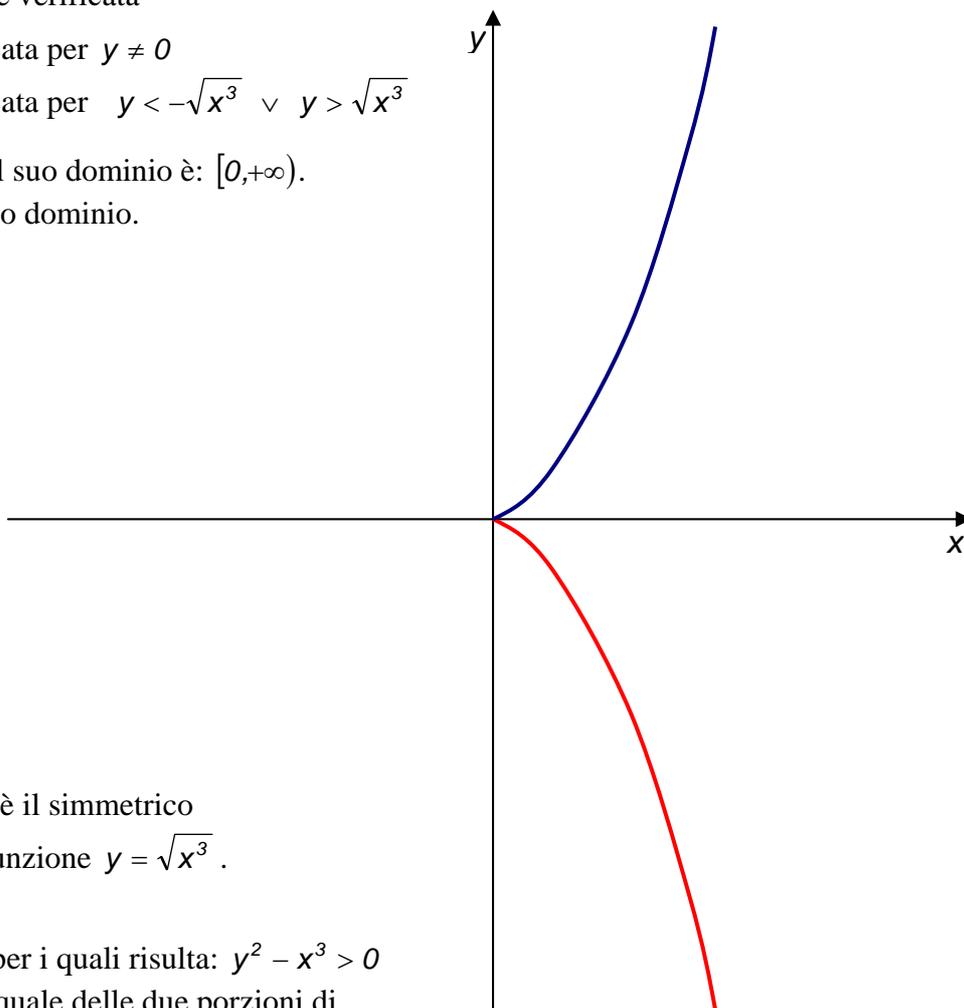
Innanzitutto il punto $O(0; 0)$ non soddisfa la disuguaglianza $y^2 - x^3 > 0$.

Il punto $A(-1; 0)$ soddisfa la disuguaglianza $y^2 - x^3 > 0$

Il punto $B(0; -1)$ soddisfa la disuguaglianza $y^2 - x^3 > 0$

Il punto $C(0; 1)$ soddisfa la disuguaglianza $y^2 - x^3 > 0$

Il punto $D(1; 0)$ non soddisfa la disuguaglianza $y^2 - x^3 > 0$.



Concludendo l'insieme dei punti per i quali risulta: $y^2 - x^3 > 0$ è data dalla porzione di piano a sinistra delle due curve (colorata in azzurro).

I punti che appartengono alle due curve non fanno parte dell'insieme dei punti soluzione.

