ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2008

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Problema 2

Siano *f* e *g* le funzioni definite, per ogni *x* reale da $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$

1. si traccino i grafici di *f* e di *g* e si indichi con *A* la loro intersezione di ascissa negativa.
2. si calcoli con uno dei metodi di approssimazione numerica studiati, l'ascissa di *A* con due cifre decimali esatte.
3. quanti e quali sono gli zeri della funzione $h(x) = 2^x - x^2$. Si tracci il grafico di *h*.
4. si calcoli l'area racchiusa tra il grafico di *h* e l'asse x sull'intervallo [2, 4].

Punto 1

La funzione $f(x) = 2^x$ ha per dominio l'insieme $Dom(f) = (-\infty, \infty)$.

La funzione è sempre positiva e strettamente crescente nel suo dominio.

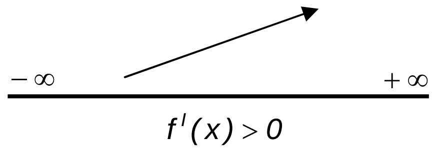
Interseca gli assi cartesiani in:

$$\begin{cases} y = 2^x \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2^0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P(0;1)$$

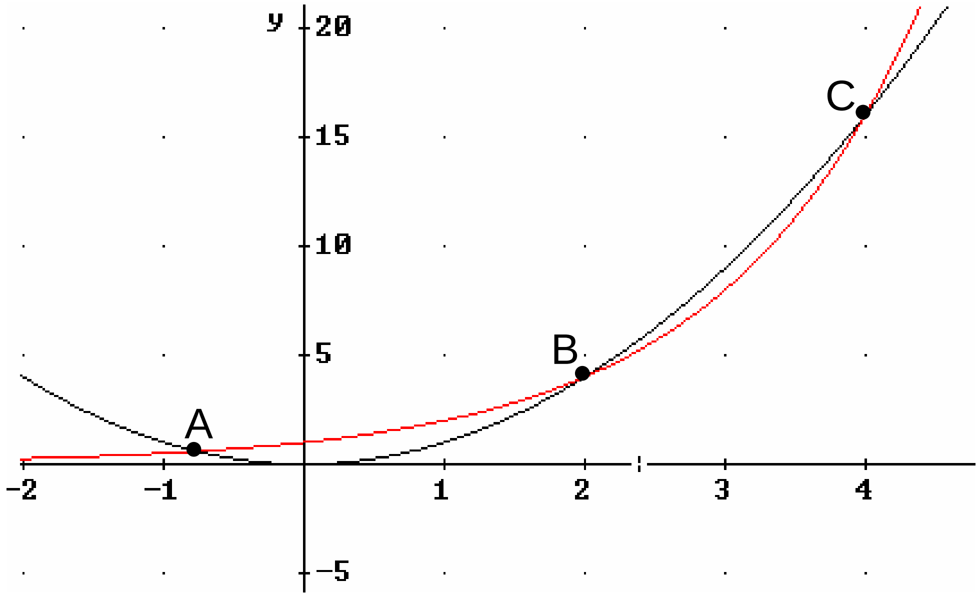
$f'(x) = 2^x \cdot \log 2$;

$f'(x) = 0$; $2^x \cdot \log 2 = 0$; $2^x = 0$ mai

$f'(x) > 0$; $2^x \cdot \log 2 > 0$; Essendo $\log 2 > 0$ si ha: $2^x > 0 \quad \forall x \in R$



La funzione $g(x) = x^2$ è una parabola con vertice nell'origine e concavità rivolta verso l'alto.
I loro grafici sono:



Punto 2 - metodo 1

Le coordinate del punto A si ottengono risolvendo il sistema: $\begin{cases} y = 2^x \\ y = x^2 \end{cases}$ da cui: $2^x = x^2$; $2^x - x^2 = 0$

Ma tale equazione non è risolvibile per via algebrica.

Applicando il ***metodo di bisezione*** alla funzione $h(x) = 2^x - x^2$ si ha:

Consideriamo l'intervallo $(-1; 0)$ poiché in tali estremi la funzione assume valori discordi.	$b-a$
$h(-1) = 2^{-1} - (-1)^2 = \frac{1}{2} - 1 = \boxed{-\frac{1}{2} < 0}$ $h(0) = 2^0 - (0)^2 = 1 - 0 = \boxed{+1 > 0}$	1
Il punto medio dell'intervallo $(-1; 0)$ è $-\frac{1}{2} = \boxed{-0{,}5}$. $h\left(-\frac{1}{2}\right) = 2^{-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cong 0{,}4571 > 0$	
Consideriamo l'intervallo $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ poiché in tali estremi la funzione assume valori discordi.	$0{,}5$
Il punto medio dell'intervallo $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ è $-\frac{3}{4} = \boxed{-0{,}750}$. $h\left(-\frac{3}{4}\right) \cong 0{,}0321 > 0$	
Consideriamo l'intervallo $\left(-1; -\frac{3}{4}\right)$ poiché in tali estremi la funzione assume valori discordi.	$0{,}25$
Il punto medio dell'intervallo $\left(-1; -\frac{3}{4}\right)$ è $-\frac{7}{8} = \boxed{-0{,}875}$. $h\left(-\frac{7}{8}\right) \cong -0{,}2204 < 0$	
Consideriamo l'intervallo $\left(-\frac{7}{8}; -\frac{3}{4}\right)$ poiché in tali estremi la funzione assume valori discordi.	$0{,}125$
Il punto medio dell'intervallo $\left(-\frac{7}{8}; -\frac{3}{4}\right)$ è $-\frac{13}{16} \cong \boxed{-0{,}8125}$. $h\left(-\frac{13}{16}\right) \cong -0{,}0908 < 0$	
Consideriamo l'intervallo $\left(-\frac{13}{16}; -\frac{3}{4}\right)$ poiché in tali estremi la funzione assume valori discordi.	$0{,}0625$
Il punto medio dell'intervallo $\left(-\frac{13}{16}; -\frac{3}{4}\right)$ è $-\frac{25}{32} \cong \boxed{-0{,}7813}$. $h\left(-\frac{25}{32}\right) \cong -0{,}0285 < 0$	
Consideriamo l'intervallo $\left(-\frac{25}{32}; -\frac{3}{4}\right)$ poiché in tali estremi la funzione assume valori discordi.	$0{,}0313$
Il punto medio dell'intervallo $\left(-\frac{25}{32}; -\frac{3}{4}\right)$ è $-\frac{49}{64} \cong \boxed{-0{,}7656}$. $h\left(-\frac{49}{64}\right) \cong +0{,}0020 > 0$	
Consideriamo l'intervallo $\left(-\frac{25}{32}; -\frac{49}{64}\right)$ poiché in tali estremi la funzione assume valori discordi.	$0{,}0156$
Il punto medio dell'intervallo $\left(-\frac{25}{32}; -\frac{49}{64}\right)$ è $-\frac{99}{128} \cong \boxed{-0{,}7734}$. $h\left(-\frac{99}{128}\right) \cong -0{,}0132 < 0$	
Consideriamo l'intervallo $\left(-\frac{99}{128}; -\frac{49}{64}\right)$ poiché in tali estremi la funzione assume valori discordi.	$0{,}0078 < 0{,}01$
Il punto medio dell'intervallo $\left(-\frac{99}{128}; -\frac{49}{64}\right)$ è $-\frac{197}{256} \cong \boxed{-0{,}7695}$. $h\left(-\frac{197}{256}\right) \cong -0{,}0056 < 0$	STOP
Consideriamo l'intervallo $\left(-\frac{197}{256}; -\frac{49}{64}\right)$ poiché in tali estremi la funzione assume valori discordi.	
Il punto medio dell'intervallo $\left(-\frac{197}{256}; -\frac{49}{64}\right)$ è $-\frac{393}{512}. \cong \boxed{-0{,}7676}$.	

Pertanto l'ascissa di *A* con due cifre decimali esatte è: $\boxed{x_A = -0{,}76}$.

Punto 2 - metodo 2

Applicando il ***Metodo delle tangenti*** alla funzione $h(x) = 2^x - x^2$ si ha:

La funzione $h(x) = 2^x - x^2$ verifica le ipotesi del metodo delle tangenti.
Essa è continua e derivabile in $[-1, 0]$ infinite volte.

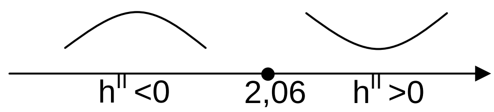
$h(-1) = 2^{-1} - (-.1)^2 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$ $\qquad$ $h(0) = 2^0 - (0)^2 = 1 > 0$

Pertanto la funzione assume valori discordi agli estremi dell'intervallo $[-1, 0]$, cioè: $h(-1) \cdot h(0) < 0$

$h^{I}(x) = 2^x \log 2 - 2x$ $\qquad$ $h^{II}(x) = 2^x \cdot (\log 2)^2 - 2$

$h^{II}(x) > 0$ per $2^x \cdot (\log 2)^2 - 2 > 0$; $2^x \cdot (\log 2)^2 > 2$; $2^x > \frac{2}{(\log 2)^2}$; $\log 2^x > \log \frac{2}{(\log 2)^2}$;

$x \cdot \log 2 > \log \frac{2}{(\log 2)^2}$; $x > \frac{\log \frac{2}{(\log 2)^2}}{\log 2} \cong 2{,}06$

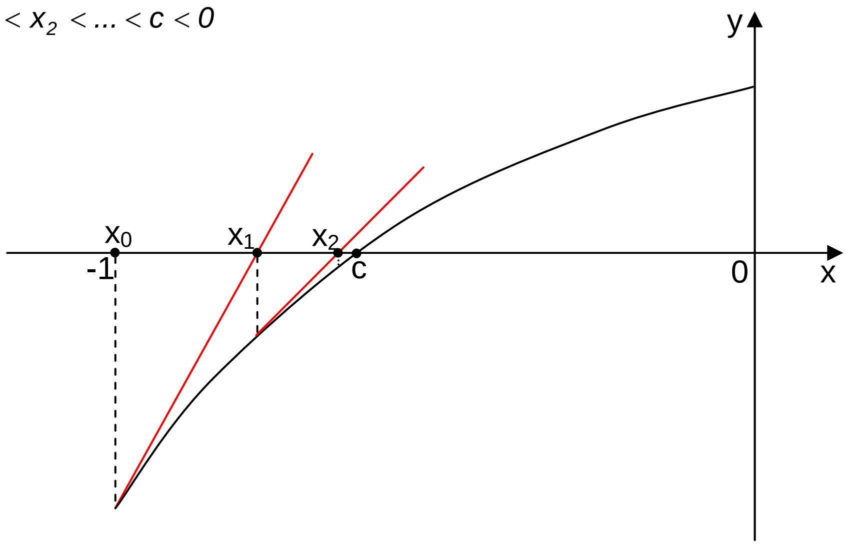


Quindi nell'intervallo $[-1, 0]$ la derivata seconda è sempre minore di zero.

Visto che la funzione e la sua derivata seconda in $x_0 = -1$ *sono concordi* $(h(-1) < 0$ *e* $h^{II}(-1) < 0)$, *l'iterazione ha come punto iniziale l'estremo* $x_0 = -1$.

Si ha quindi la successione : $x_0 = -1 < x_1 < x_2 < ... < c < 0$

La situazione grafica è la seguente :



Le formule dell'iterazione sono :

$$\begin{cases} x_0 = -1 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{h(x_n)}{h^{I}(x_n)} \end{cases}$$

$x_0 = -1$

$$x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h^{I}(x_0)} = -1 - \frac{-\frac{1}{2}}{2^{-1}\log 2 - 2\cdot(-1)} = -1 + \frac{0{,}5}{0{,}5\cdot\log 2 + 2} = -1 + 0{,}2131 = -0{,}7869$$

$$x_2 = x_1 - \frac{h(x_1)}{h^{I}(x_1)} = -0{,}7869 - \frac{-0{,}0396}{1{,}9755} = -0{,}7869 + 0{,}0201 = -0{,}7668$$

$$x_3 = x_2 - \frac{h(x_2)}{h^{I}(x_2)} = -0{,}7668 - \frac{-0{,}0003}{1{,}9410} = -0{,}7869 + 0{,}0001 = -0{,}7667$$

Essendo $|x_2 - x_3| < \frac{1}{100}$ l'approssimazione a due cifre decimali del valore cercato è: $\boxed{x - 0{,}76}$.

Punto 3

La funzione $h(x)=2^x-x^2$ è continua e derivabile in tutto il suo dominio $Dom(h)=(-\infty,+\infty)$.

Interseca l'asse y nel punto: $P(0;1)$. Infatti : $\begin{cases} y=2^x-x^2 \\ x=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases}$

Oltre alla soluzione $\boxed{x_A=-0{,}76}$ la funzione $h(x)=2^x-x^2$ ha altri due zeri: $\boxed{x_B=2}$ e $\boxed{x_c=4}$,

come si evince tabulando la funzione per valori interi di x:

x	-3	-2	-1	-0,76	0	1	2	3	4	5	6	7
$h(x)=2^x-x^2$	-8,88	-3,75	-0,5	0	1	1	0	-1	0	7	28	79

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2^x-x^2\right)=+\infty-\infty=?$. Raccogliendo a fattor comune x^2 si ha: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\left(\dfrac{2^x}{x^2}-1\right)$.

Calcolando a parte il limite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{x^2}=\dfrac{+\infty}{+\infty}=?$ Applicando De L'Hospital si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\cdot\log 2}{2x}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\cdot\log 2\cdot\log 2}{2}=+\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\left(\frac{2^x}{x^2}-1\right)=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$$

Pertanto $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2^x-x^2\right)=+\infty}$

Mentre $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2^x-x^2\right)=-\infty}$ essendo $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$

La funzione non ha quindi ne asintoti verticali, ne asintoti orizzontali.

Verifichiamo se esiste l'asintoto obliquo a destra:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x-x^2}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}=?$$ Applicando De L'Hospital si ha:

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\cdot\log 2-2x}{1}=\lim_{x\to+\infty}\left(2^x\cdot\log 2-2x\right)=+\infty-\infty$$ Raccogliendo a fattor comune la x si ha:

$$=\lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\frac{2^x\cdot\log 2}{x}-2\right)=+\infty \qquad \text{essendo} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\cdot\log 2}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\cdot(\log 2)^2}{1}=+\infty.$$

Ciò vuol dire che non esiste l'asintoto obliquo a destra.

Verifichiamo se esiste l'asintoto obliquo a sinistra:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x-x^2}{x}=\frac{-\infty}{-\infty}=?$$ Applicando De L'Hospital si ha:

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x\cdot\log 2-2x}{1}=+\infty.$$ Ciò vuol dire che non esiste l'asintoto obliquo a sinistra.

Da quando fin qui dimostrato, si ha che il segno della funzione è il seguente :

x	$(-\infty,-0{,}76)$	-0,76	$(-0{,}76,2)$	2	$(2,4)$	4	$(4,+\infty)$
$h(x)=2^x-x^2$	<0	$=0$	>0	$=0$	<0	$=0$	>0

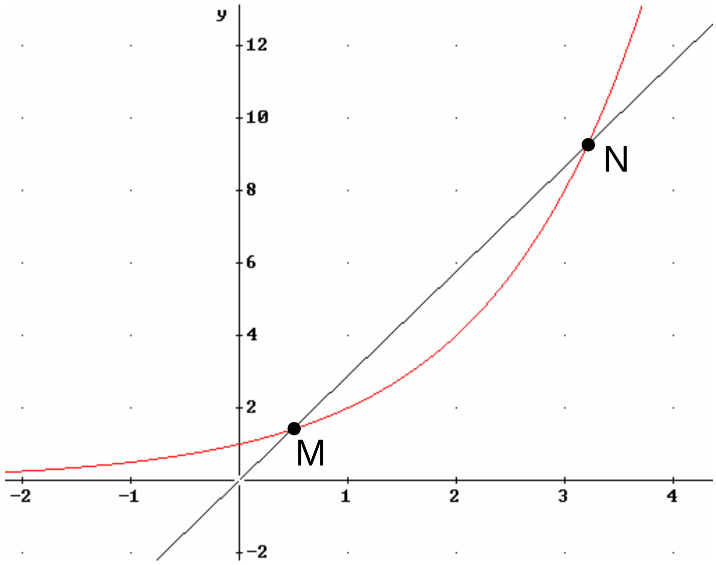
La derivata prima della funzione è: $\boxed{h'(x) = 2^x \cdot \log 2 - 2x}$.

$\boxed{h'(x) = 0}$ per $2^x \cdot \log 2 - 2x = 0$

cioè quando : $2^x = \dfrac{2}{\log 2} x$.

Le soluzioni approssimate di tale equazione si ottengono risolvendo il sistema $\begin{cases} y = 2^x \\ y = \dfrac{2}{\log 2} x \end{cases}$

Essendo $y = 2^x$ una funzione convessa, tale curva può avere al massimo due punti in comune con la retta $y = \dfrac{2}{\log 2} x$



$\boxed{h'(x) > 0}$ per $2^x \cdot \log 2 - 2x > 0$

cioè quando : $\log 2 \cdot \left(2^x - \dfrac{2}{\log 2} x \right) > 0$.

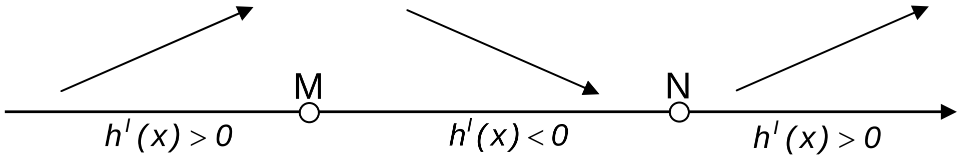
Essendo $\log 2 \cong 0{,}69$ un numero positivo occorre risolvere la disequazione: $2^x - \dfrac{2}{\log 2} x > 0$.

Essa si risolve confrontando i grafici della funzione esponenziale $y = 2^x$ e della retta $y = \dfrac{2}{\log 2} x$.

$2^x - \dfrac{2}{\log 2} x > 0$ quando $y = 2^x$ è maggiore di $y = \dfrac{2}{\log 2} x$ e cioè in $(-\infty,\ x_M)$ U $(x_N,\ +\infty)$

$2^x - \dfrac{2}{\log 2} x < 0$ quando $y = 2^x$ è minore di $y = \dfrac{2}{\log 2} x$ e cioè in $(x_M,\ x_N)$

Inoltre, per quanto dimostrato precedentemente, si ha che : $x_M \in [-0{,}76, 2]$ e $x_N \in [2, 4]$.



Quindi x_M è un punto di massimo relativo e x_N è un punto di minimo relativo per la funzione.

Utilizzando un metodo di approssimazione numerica si trova: $x_M \cong 0{,}48$ *e* $x_N \cong 3.21$.

La derivata seconda della funzione è: $h''(x) = 2^x \cdot (\log 2)^2 - 2$

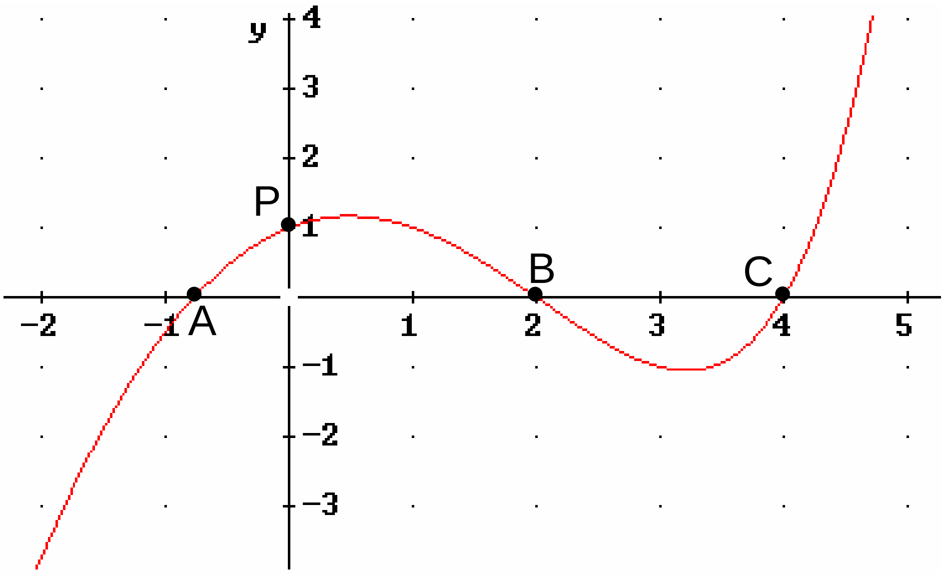
$h''(x) = 0$ per $2^x \cdot (\log 2)^2 - 2 = 0$; $2^x = \dfrac{2}{(\log 2)^2}$; $\log 2^x = \log \dfrac{2}{(\log 2)^2}$; $x \cdot \log 2 = \log \dfrac{2}{(\log 2)^2}$;

$$x = \frac{\log \dfrac{2}{(\log 2)^2}}{\log 2} = \frac{\log 2 - \log(\log 2)^2}{\log 2} = 1 - \frac{\log(\log 2)^2}{\log 2} = 1 - \frac{2\log(\log 2)}{\log 2} \cong 2{,}0575$$

$h''(x) > 0$ per $x > 1 - \dfrac{2\log(\log 2)}{\log 2} \cong 2{,}0575$.

Per $x \cong 2{,}0575$ la funzione ammette un punto di flesso ascendente.

Il grafico approssimato è pertanto:



Punto 4

Poiché nell'intervallo $[2,4]$ la funzione è negativa, l'area richiesta è data dall'opposto dell'integrale definito della funzione tra 2 e 4.

$$A = -\int_2^4 h(x)\,dx \quad = \quad -\int_2^4 \left(2^x - x^2\right)dx \quad = \quad \int_2^4 \left(-2^x + x^2\right)dx \quad = \quad \left[-\frac{2^x}{\log 2} + \frac{x^3}{3}\right]_2^4 \quad =$$

$$= \left[-\frac{2^4}{\log 2} + \frac{4^3}{3}\right] - \left[-\frac{2^2}{\log 2} + \frac{2^3}{3}\right] \quad = \quad -\frac{16}{\log 2} + \frac{64}{3} + \frac{4}{\log 2} - \frac{8}{3} \quad = \quad \frac{56}{3} - \frac{12}{\log 2} \; .$$