Quesito 8

Sia f la funzione definita da $f(x)=\pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x=\pi$.

Soluzione

La funzione $f_1=\pi^x$, essendo una funzione esponenziale con base maggiore di 1, è definita $\forall x \in R$.

La funzione $f_2=x^\pi$, essendo una potenza reale di base reale, è definita solo se la base è positiva.

Pertanto il dominio di f è: $Dom(f)=(0,+\infty)$.

Tuttavia, essendo l'esponente positivo, si può considerare facente parte del Dominio anche il punto $x=0$.

In definitiva il dominio di f è: $Dom(f)=[0,+\infty)$.

La derivata prima è: $f'(x)=\pi^x\cdot \log\pi - \pi\cdot x^{\pi-1}$.

$f'(\pi)=\pi^\pi\cdot\log\pi-\pi\cdot\pi^{\pi-1} \quad = \quad \pi^\pi\cdot(\log\pi-1)$,

essendo $\log\pi>1 \quad \Rightarrow \quad \log\pi-1>0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'(x)>0}$

La derivata seconda è: $f''(x)=\pi^x\cdot(\log\pi)^2-\pi\cdot(\pi-1)x^{\pi-2}$.

$f''(\pi)=\pi^\pi\cdot(\log\pi)^2-\pi\cdot(\pi-1)\cdot\pi^{\pi-2} \quad = \quad \pi^\pi\cdot(\log\pi)^2-(\pi-1)\cdot\pi^{\pi-1} \quad = \pi^\pi\cdot(\log\pi)^2-\pi\cdot\pi^{\pi-1}+\pi^{\pi-1} \quad =$

$= \quad \pi^\pi\cdot(\log\pi)^2-\pi^\pi+\pi^{\pi-1} \quad = \quad \pi^\pi\cdot\left[(\log\pi)^2-1\right]+\pi^{\pi-1}$,

essendo $\log\pi>1 \quad \Rightarrow \quad (\log\pi)^2>1 \quad \Rightarrow \quad \left[(\log\pi)^2-1\right]>0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f''(x)>0}$

In definitiva, nel punto $x=\pi$ le derivate, prima e seconda, sono entrambe positive.