ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Sessione Ordinaria 2008

CORSO DI ORDINAMENTO

Quesito 7

Si determini, al variare di k *, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:* $x^3 - 3x^2 + k = 0$.

Soluzione

L'equazione $x^3 - 3x^2 + k = 0$ è equivalente al sistema $\begin{cases} y = k \\ y = -x^3 + 3x^2 \end{cases}$

Il che equivale a cercare i punti comuni alla cubica $y = -x^3 + 3x^2$ e il fascio improprio di rette $y = k$.

La cubica $y = -x^3 + 3x^2$ ha per dominio tutto l'insieme dei numeri reali.

Interseca gli assi cartesiani nei punti: $O(0;0)$ e $A(3;0)$

Infatti: $\begin{cases} y = -x^3 + 3x^2 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^3 - 3x^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 \cdot (x-3) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 0 \wedge x_2 = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

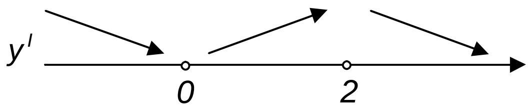
La cubica è positiva per $-x^3 + 3x^2 > 0$; $x^3 - 3x^2 < 0$; $x^2 \cdot (x-3) < 0$; $x < 3$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^3 + 3x^2\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \cdot \left(-1 + \dfrac{3}{x}\right) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^3 + 3x^2\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 \cdot \left(-1 + \dfrac{3}{x}\right) = +\infty$.

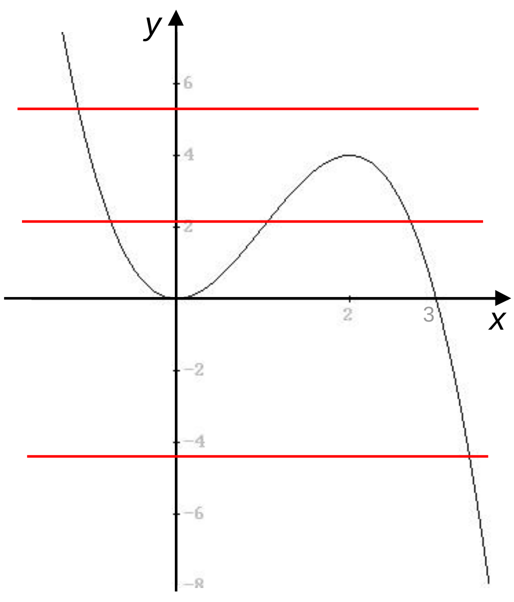
La derivata prima è: $y' = -3x^2 + 6x$

$y' = 0$ per $-3x^2 + 6x = 0$; $x \cdot (-3x + 6) = 0$; $\begin{matrix} x = 0 \\ x = 2 \end{matrix}$

$y' > 0$ per $-3x^2 + 6x > 0$; $0 < x < 2$



La cubica ha in $x = 0$ un minimo relativo e in $x = 2$ un massimo relativo.
Essendo $f(2) = -2^3 + 3 \cdot 2^2 = -8 + 12 = 4$, la cubica ha un punto di minimo in $N(0;0)$ ed un punto di massimo in $M(2;4)$.



Dal grafico rappresentato a lato si ricava che:

per $k < 0 \vee k > 4$ una soluzione reale

per $0 < k < 4$ tre soluzioni reali e distinte

per $k = 0 \vee k = 4$ tre soluzioni reali, di cui due coincidenti.