**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

*Sessione Ordinaria 2008*

**CORSO DI ORDINAMENTO**

## *Quesito 4*

*Si esponga la regola del marchese De L'Hôpital (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare che è:* $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = 0$ .

<u>Soluzione</u>

De L'Hôpital dice che:

Teorema 1

$$\left( \begin{array}{l} \text{Siano } f(x) \text{ e } g(x) \text{ due funzioni :} \\ \text{- continue in } [a,b] \text{ e derivabili in } (a,b) \\ \quad \text{escluso al più il punto } x_0 \in (a,b) \\ \text{- } g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b) - \{x_0\} \\ \text{- } f(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad g(x_0) = 0 \\ \text{- esiste (finito o infinito) il } \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{array} \right) \Rightarrow \left( \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$$

Teorema 2

$$\left( \begin{array}{l} \text{Siano } f(x) \text{ e } g(x) \text{ due funzioni :} \\ \text{- derivabili in } (a,b) \text{ escluso al più il punto } x_0 \in (a,b) \\ \text{- } g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b) - \{x_0\} \\ \text{- } \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty \\ \text{- esiste (finito o infinito) il } \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{array} \right) \Rightarrow \left( \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$$

Il limite $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2008}}{2^x}$ si presenta sotto la forma di indeterminazione $\frac{\infty}{\infty}$.

Le due funzioni soddisfano il II° Teorema di De L'Hôpital.

Applicando 2008 volte il Teorema di De L'Hôpital si ha:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2008 \cdot x^{2007}}{2^x \cdot \log 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2008 \cdot 2007 \cdot x^{2006}}{2^x \cdot \log 2 \cdot \log 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2008 \cdot 2007 \cdot 2006 \cdot x^{2005}}{2^x \cdot \log 2 \cdot \log 2 \cdot \log 2} = \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{2008\,!}{(\log 2)^{2008}} \cdot \frac{1}{2^x} = \frac{2008\,!}{(\log 2)^{2008}} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^x} = 0. \qquad \left( \text{Essendo il } \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^x} = 0 \right)$$