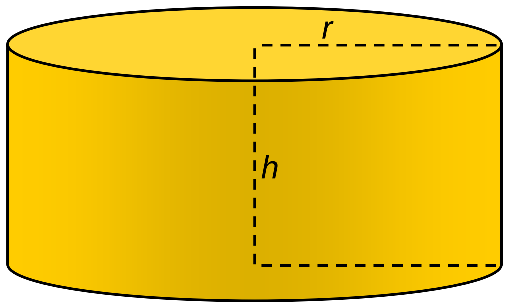
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Sessione Ordinaria 2008

CORSO DI ORDINAMENTO

Quesito 3

Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie S (quella laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?

Soluzione



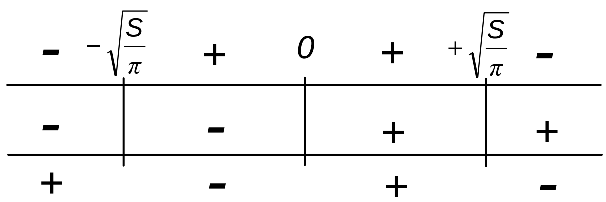
Indicando con x il raggio di base della casseruola a forma cilindrica e con h la sua altezza, si ha che:
la superficie (quella laterale più il fondo) vale: $S = 2\pi xh + \pi x^2$.

Essendo la superficie S un numero costante, l'altezza della casseruola, in funzione di x, vale: $h = \dfrac{S - \pi x^2}{2\pi x}$.

L'espressione va considerata solamente per valori positivi dell'altezza e del raggio.

Cioè: $x > 0$ e

$$h = \frac{S - \pi x^2}{2\pi x} > 0\,; \qquad \begin{cases} S - \pi x^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{S}{\pi}} < x < +\sqrt{\dfrac{S}{\pi}} \\ x > 0 \end{cases}$$



Considerata anche la condizione precedente ($x > 0$), si hanno le seguenti limitazioni: $0 < x < \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$.

Il volume della casseruola è: $V(x) = \pi x^2 \cdot \dfrac{S - \pi x^2}{2\pi x} = \dfrac{x \cdot (S - \pi x^2)}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot (Sx - \pi x^3)$.

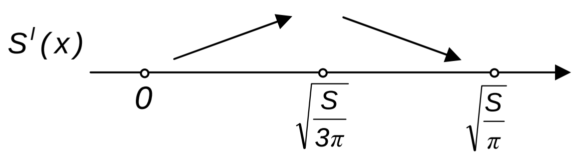
La funzione volume da rendere massima è quindi: $\boxed{V(x) = \dfrac{1}{2} \cdot (Sx - \pi x^3)}$ con le limitazioni $0 < x < \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$.

La derivata prima è: $V'(x) = \dfrac{1}{2} \cdot (S - 3\pi x^2)$

$$V'(x) = 0\,; \quad \frac{1}{2} \cdot (S - 3\pi x^2) = 0\,; \quad S - 3\pi x^2 = 0\,; \quad \begin{array}{l} x_1 = -\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}} \quad \textit{non accettabile} \\ x_2 = +\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}} \end{array}$$

$$V'(x) > 0\,; \quad \frac{1}{2} \cdot (S - 3\pi x^2) > 0\,; \quad -\sqrt{\frac{S}{3\pi}} < x < +\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$$

ma considerando le limitazioni $0 < x < \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$, si ha che:



$V'(x) > 0$ per $0 < x < \sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$

Pertanto per $x = \sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ il volume è massimo. Il volume massimo vale:

$$V_{Max}(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(S\sqrt{\frac{S}{3\pi}} - \pi \left(\sqrt{\frac{S}{3\pi}} \right)^3 \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(S\sqrt{\frac{S}{3\pi}} - \pi \frac{S}{3\pi} \sqrt{\frac{S}{3\pi}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(S\sqrt{\frac{S}{3\pi}} - \frac{S}{3} \sqrt{\frac{S}{3\pi}} \right) = \frac{1}{3} S\sqrt{\frac{S}{3\pi}} .$$