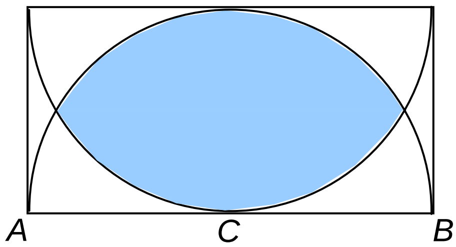
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Sessione Ordinaria 2008

CORSO DI ORDINAMENTO

Problema 2

Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro $\overline{AB} = 2$, si affrontino le seguenti questioni:

A. Si disegni nello stesso semipiano di Γ un secondo semicerchio Γ_1 tangente ad AB in C e di uguale raggio 1. Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1

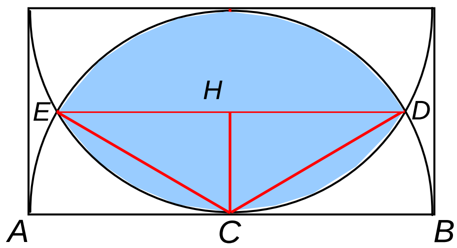


B. Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ.

C. Sia P un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su AB. Si ponga $P\hat{C}B = x$ e si esprimano in funzione di x le aree S_1 e S_2 dei triangoli $\overset{\Delta}{APH}$ e $\overset{\Delta}{PCH}$.
Si calcoli il rapporto $f(x) = \dfrac{S_1(x)}{S_2(x)}$

D. Si studi $f(x)$ e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.

Punto A



La metà dell'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1 è data dalla differenza fra l'area del settore circolare $C\overset{\frown}{DE}$ e l'area del triangolo $\overset{\Delta}{CDE}$:

$\overline{CD} = 1$ (perché raggio della circonferenza)

$\overline{CH} = \dfrac{1}{2}$ (per la simmetria della figura)

Pertanto l'angolo $D\hat{C}H = 60°$. Mentre $\overline{DH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

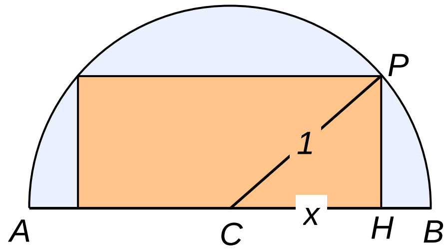
L'area del settore circolare $C\overset{\frown}{DE}$ vale : $S_{C\overset{\frown}{DE}} = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot \overline{CD}^2 = \boxed{\dfrac{\pi}{3}}$.

L'area del triangolo $\overset{\Delta}{CDE}$ vale : $S_{\overset{\Delta}{CDE}} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{CH} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$.

Pertanto l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1 vale:

$$S = 2 \cdot \left[\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right] = 2 \cdot \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12} = \boxed{\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}}.$$

Punto B



Ponendo $\overline{CH} = x$, con le limitazioni $0 < x < 1$,

dal triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{PCH}$, si ha: $\overline{PH} = \sqrt{1-x^2}$.

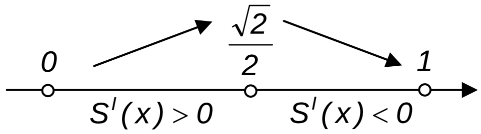
L'area del rettangolo inscritto in Γ è data da : $\boxed{S(x) = 2x \cdot \sqrt{1-x^2}}$

La derivata : $S'(x) = 2 \cdot \left[\sqrt{1-x^2} + x \cdot \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right] =$

$$= \quad 2 \cdot \left[\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right] \quad = \quad 2 \cdot \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \quad = \quad 2 \cdot \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \; .$$

$S'(x) = 0$ per $2 \cdot \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0$; $1-2x^2 = 0$; $x^2 = \dfrac{1}{2}$; $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} =$ $x_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *non accettabile*, $x_2 = +\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

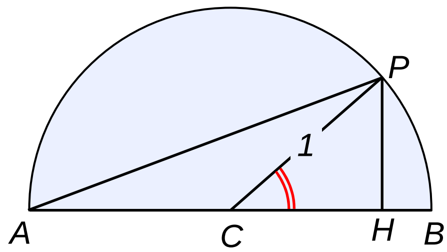
$S'(x) > 0$ per $2 \cdot \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} > 0$; $1-2x^2 > 0$; $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x < +\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



Pertanto l'area del rettangolo inscritto in Γ è massima per $\boxed{x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

Tale area massima vale : $S_{Max} = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1 - \dfrac{1}{2}} \quad = \quad 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{2}} \quad = \boxed{1}$.

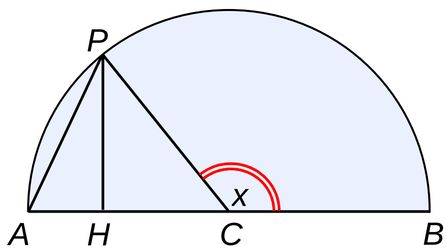
Punto C – ragionamento 1



Avendo posto $\overset{\wedge}{PCB} = x$ si ha: $\overline{PH} = sen\,x$ $\qquad \overline{CH} = |\cos x|$

Essendo $0 < x < \pi$, la funzione $\cos x$ assume anche valori negativi; pertanto occorre considerarla in valore assoluto affinché possa rappresentare la misura della base CH .

Nel triangolo $\overset{\Delta}{APH}$ la misura della base è: $\overline{AH} = 1 + \cos x$.



In questo caso non occorre considerare la funzione $\cos x$ in valore assoluto, poiché:

nell'intervallo $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\qquad$ la base $\overline{AH} = \overline{AC} + \overline{CH}$

nell'intervallo $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ $\qquad$ la base $\overline{AH} = \overline{AC} - \overline{CH}$

L'area $S_1 = \dfrac{1}{2} \cdot (1 + \cos x) \cdot sen\,x$ $\qquad$ L'area $S_2 = \dfrac{1}{2} \cdot |\cos x| \cdot sen\,x$

Il rapporto $f(x) = \dfrac{S_1(x)}{S_2(x)} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot (1+\cos x) \cdot sen\,x}{\frac{1}{2} \cdot |\cos x| \cdot sen\,x} = \boxed{\dfrac{1+\cos x}{|\cos x|}}$ definita negli intervalli $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

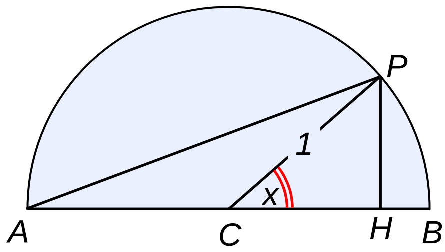
Infatti dovendo essere $S_2(x) = \dfrac{1}{2} \cdot |\cos x| \cdot sen\,x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \cos x \neq 0 \\ sen\,x \neq 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ x \neq 0 \;\; \wedge x \neq \pi \end{array}$

Punto C – ragionamento 2

Occorre distinguere due casi, perchè le misure dei lati dei triangoli $\overset{\triangle}{APH}$ e $\overset{\triangle}{PCH}$ hanno segni diversi.

Nel primo l'angolo x è un angolo acuto $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Nel secondo l'angolo x è un angolo ottuso $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

I° Caso: $0 < x < \frac{\pi}{2}$



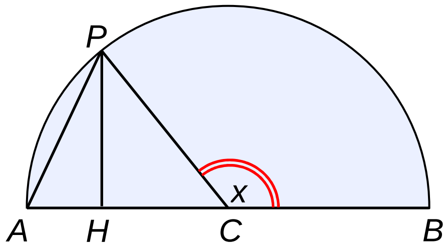
Le misure dei lati dei triangoli $\overset{\triangle}{APH}$ e $\overset{\triangle}{PCH}$ sono:

$\overline{PH} = sen\, x \qquad \overline{CH} = \cos x \qquad \overline{AH} = 1 + \cos x$

L'area $S_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos x) \cdot sen\, x$ L'area $S_2 = \frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot sen\, x$

Il rapporto $f_1(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (1+\cos x) \cdot sen\, x}{\frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot sen\, x} = \boxed{\frac{1+\cos x}{\cos x}}$ definita nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

II° Caso: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$



Le misure dei lati dei triangoli $\overset{\triangle}{APH}$ e $\overset{\triangle}{PCH}$ sono:

$\overline{PH} = sen\,(\pi - x) = sen\, x \qquad \overline{CH} = \cos(\pi - x) = -\cos x$

$\overline{AH} = \overline{AC} - \overline{CH} = 1 - (-\cos x) = 1 + \cos x$

L'area $S_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos x) \cdot sen\, x$ L'area $S_2 = -\frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot sen\, x$

Il rapporto $f_2(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (1+\cos x) \cdot sen\, x}{-\frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot sen\, x} = \boxed{-\frac{1+\cos x}{\cos x}}$ definita nell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Occorre considerare inoltre i casi limiti:

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = S_2 = 0$ la funzione rapporto non è definita.

$x = \pi \quad \Rightarrow \quad S_1 = S_2 = 0$ la funzione rapporto non è definita.

$x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad S_1 = \frac{1}{2}$ e $S_2 = 0$ la funzione rapporto non è definita

In definitiva la funzione rapporto richiesta è la seguente:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = +\dfrac{1+\cos x}{\cos x} & per \ 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ f_2(x) = -\dfrac{1+\cos x}{\cos x} & per \ \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

Punto D

La funzione da studiare, prescindendo dai limiti geometrici del problema, è: $\boxed{f(x) = \dfrac{1+\cos x}{|\cos x|}}$.

Il dominio è: $Dom\ f(x) = R - \left\{ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ con\ k \notin Z \right\}$.

La funzione $f(x) > 0 \quad \forall x \in Dom\, f(x)$

La funzione è *pari* (*simmetrica rispetto all'asse y*).

Infatti: $f(-x) \;=\; \dfrac{1+\cos(-x)}{|\cos(-x)|} \;=\; \dfrac{1+\cos x}{|\cos x|} \;=\; f(x)$

La funzione è *periodica* di periodo $T = 2\pi$.

Infatti: $f(x+2\pi) \;=\; \dfrac{1+\cos(x+2\pi)}{|\cos(x+2\pi)|} \;=\; \dfrac{1+\cos x}{|\cos x|} \;=\; f(x)$

Pertanto è conveniente studiarla nell'intervallo $[0, 2\pi]$. *Anzi la si potrebbe studiare nell'intervallo* $[0, \pi]$.

$$f(x) \;=\; \boxed{\frac{1+\cos x}{|\cos x|}} \;=\; \begin{cases} f_1(x) = +\dfrac{1+\cos x}{\cos x} & per\ \cos x > 0 \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \vee \dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi \\ f_2(x) = -\dfrac{1+\cos x}{\cos x} & per\ \cos x < 0 \quad \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Studiamo prima la funzione $\boxed{f_1(x) = +\dfrac{1+\cos x}{\cos x}}$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

Dominio

$$Dom\ f_1(x) = \left\{ x \in R \,/\, x \neq \frac{\pi}{2} \wedge x \neq \frac{3\pi}{2} \right\}$$

Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{1+\cos x}{\cos x} \\ y = 0 \end{cases} \quad 1+\cos x = 0\ ; \quad \cos x = -1\ ; \quad x = \pi \quad \Rightarrow \quad A(\pi; 0)$$

$$\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{1+\cos x}{\cos x} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{1+\cos 0}{\cos 0} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{1+1}{1} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A(0; 2)$$

Studio del segno

$$f_1(x) > 0 \qquad \frac{1+\cos x}{\cos x} > 0\ ; \quad \begin{matrix} 1+\cos x > 0 \\ \cos x > 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \forall x \neq \pi \\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \vee \dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi \end{matrix} \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi .$$

Limiti ed asintoti

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1+\cos x}{\cos x} = 2 \qquad\qquad \lim_{x \to 2\pi^-} \frac{1+\cos x}{\cos x} = 2$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1+\cos x}{\cos x} = -\infty \qquad\qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1+\cos x}{\cos x} = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}$$ è un asintoto verticale.

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^+} \frac{1+\cos x}{\cos x} = +\infty \qquad\qquad \lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} \frac{1+\cos x}{\cos x} = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}\pi$$ è un asintoto verticale.

La curva, ovviamente, non ha asintoti orizzontali ed obliqui.

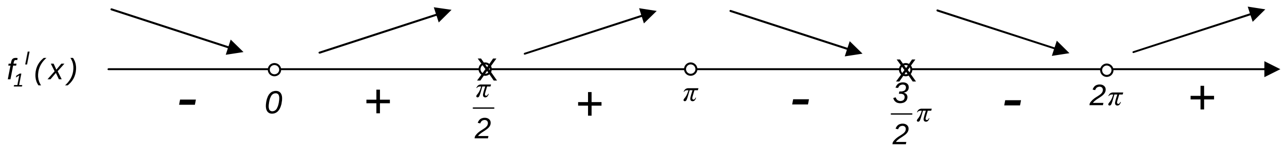
Derivata prima

$$f_1'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x \cdot \cos x - (-\operatorname{sen} x)\cdot(1+\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{-\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

Crescenza e decrescenza

$$f_1'(x) = 0 \;;\quad \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = 0 \;;\quad \operatorname{sen} x = 0 \;;\quad x = 0\,;\quad x = \pi\,;\quad x = 2\pi$$

$$f_1'(x) > 0 \;;\quad \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} > 0 \;;\quad \operatorname{sen} x > 0 \;;\quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \;\wedge\; \frac{\pi}{2} < x < \pi$$



Pertanto per $x = 0$ e $x = 2\pi$ si hanno due punti di minimo relativi.

Mentre per $x = \pi$ si ha un punto di massimo relativo.

$$f_1(0) = f_1(2\pi) = \frac{1+\cos 0}{\cos 0} = \frac{1+1}{1} = 2 \qquad\qquad f_1(\pi) = \frac{1+\cos\pi}{\cos\pi} = \frac{1-1}{-1} = 0$$

I punti di minimo relativo sono: $Q\,(0;\,2)$ e $R\,(0;\,2\pi)$. Il punto di massimo relativo è: $S\,(\pi;\,0)$.

Derivata seconda

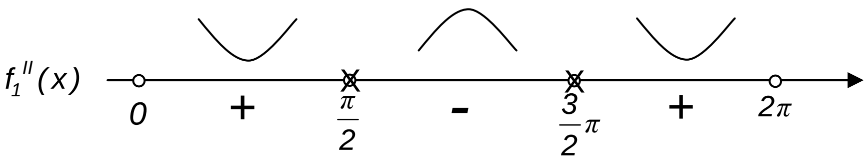
$$f_1''(x) = \frac{\cos x \cdot \cos^2 x - 2\cos x \cdot (-\operatorname{sen} x)\cdot \operatorname{sen} x}{\cos^4 x} = \frac{\cos^3 x + 2\cos x \cdot \operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\cos x \cdot \left(\cos^2 x + 2\operatorname{sen}^2 x\right)}{\cos^4 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x} = \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x} \;.$$

Concavità e flessi

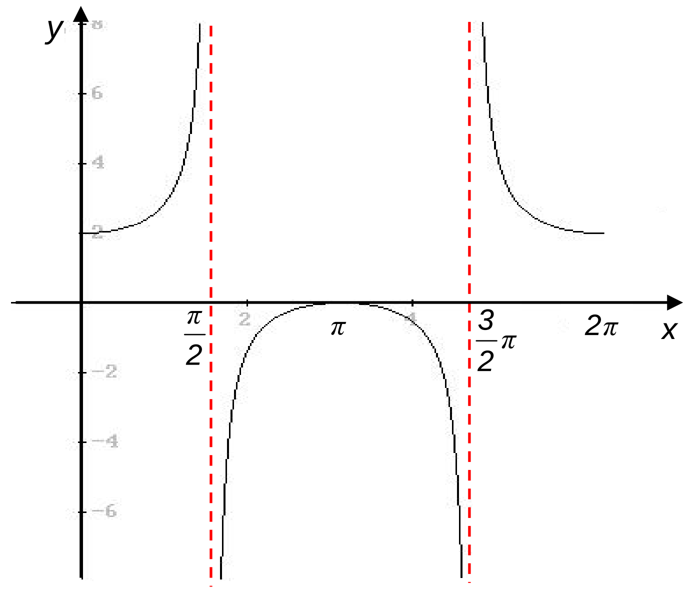
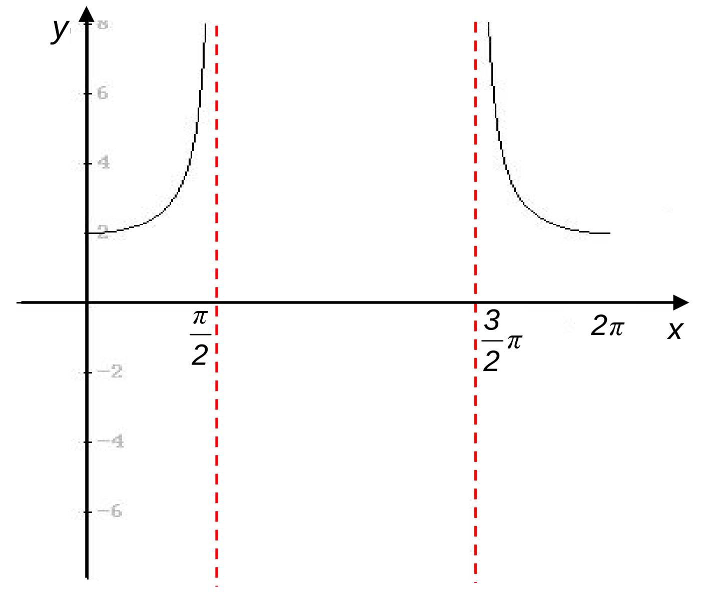
$$f_1''(x) = 0\,;\quad \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x} = 0\,;\quad 1+\operatorname{sen}^2 x = 0\,;\quad \nexists\, x \in R \quad \Rightarrow$$ La curva non ha flessi.

$$f_1''(x) > 0\,;\quad \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x} > 0\,;\quad \begin{array}{l} 1+\operatorname{sen}^2 x > 0 \\ \cos^2 x > 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \forall\, x \in R \\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \;\vee\; \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi \end{array} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \;\vee\; \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$$

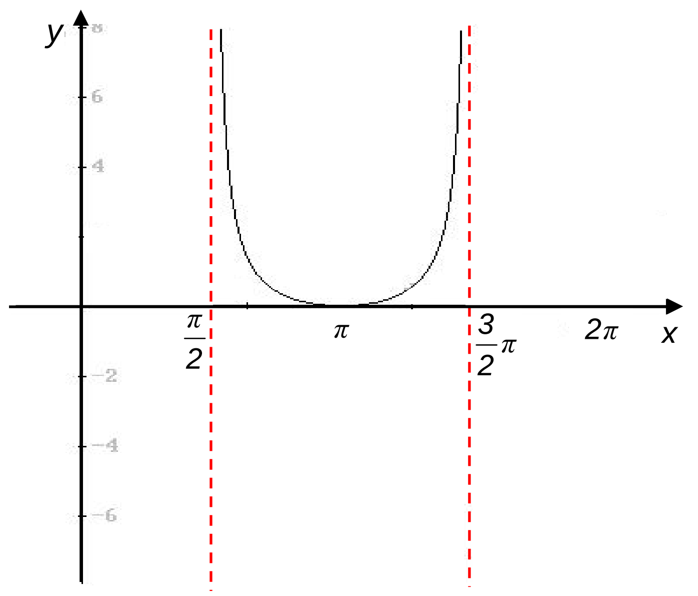
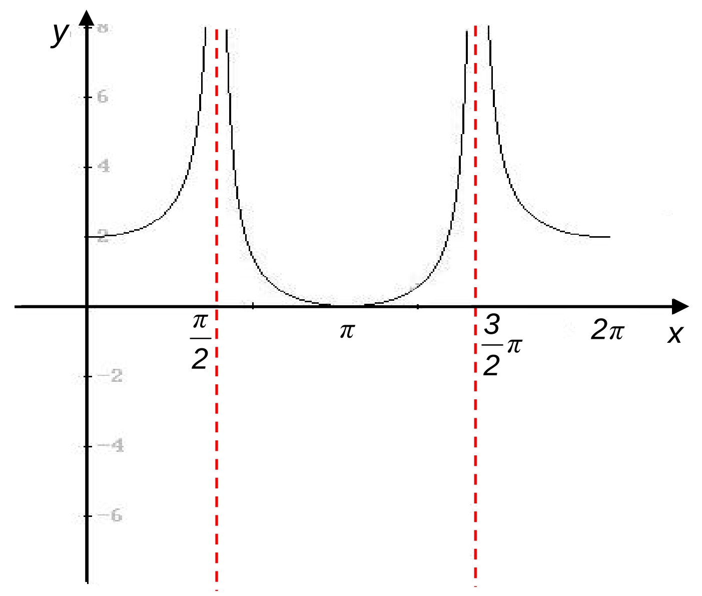


Il grafico della funzione $f_1(x) = +\dfrac{1+\cos x}{\cos x}$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ è quello nella casella n° 1.

Il grafico della funzione $f_1(x) = +\dfrac{1+\cos x}{\cos x}$ nell'intervallo $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ è quello nella casella n° 2.

1	**2**
$\boxed{f_1(x) = +\dfrac{1+\cos x}{\cos x}}$ con $x \in [0, 2\pi]$	$\boxed{f_1(x) = +\dfrac{1+\cos x}{\cos x}}$ con $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
	

Il grafico della funzione $f_2(x) = -\dfrac{1+\cos x}{\cos x}$ nell'intervallo $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi\right)$, è ottenuto simmetrizzando rispetto all'asse x, il ramo della curva $f_1(x) = +\dfrac{1+\cos x}{\cos x}$ rappresentato nell'intervallo medesimo (n° 3) .

3	**4**
$\boxed{f_2(x) = -\dfrac{1+\cos x}{\cos x}}$ con $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi\right)$	$\boxed{f(x) = \left\lvert\dfrac{1+\cos x}{\cos x}\right\rvert}$ con $x \in [0, 2\pi]$
	

Concludendo il grafico della funzione $\boxed{f(x) = \frac{1+\cos x}{|\cos x|}}$ è dato dall'unione dei grafici n° 2 e n° 3.

Esso è rappresentato nella casella n° 4.

Naturalmente tale grafico si ripete periodicamente nei due versi, positivo e negativo, dell'asse x.

In definitiva, il grafico richiesto è sotto rappresentato: