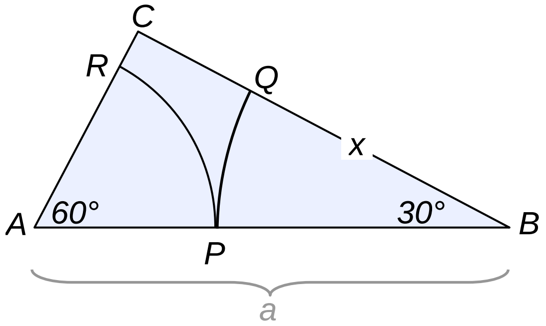
CORSO DI ORDINAMENTO

Problema 1

Il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ ha l'ipotenusa $\overline{AB} = a$ e l'angolo $C\hat{A}B = \frac{\pi}{3}$.

A. Si descriva, internamente al triangolo, con centro in B, e raggio x l'arco di circonferenza di estremi P e Q rispettivamente su AB e su BC. Sia poi R l'intersezione con il cateto CA dell'arco di circonferenza di centro A e raggio AP. Si specifichino le limitazioni da imporre ad x affinché la costruzione sia realizzabile.



B. Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo $PQCR$ e si trovi quale sia il valore minimo e quale il valore massimo di $S(x)$.

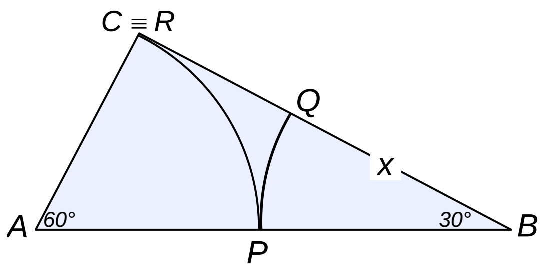
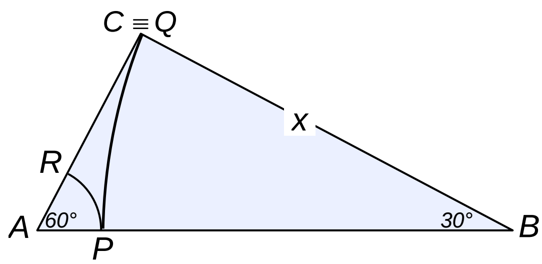
C. Tra i rettangoli con un lato su AB e i vertici del lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima.

D. Il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad AB, sono tutti quadrati.

Punto A

Il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ è la metà di un triangolo equilatero. Il cateto $\overline{AC} = \frac{a}{2}$. Il cateto $\overline{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Pertanto le limitazioni da imporre ad x affinché la costruzione sia realizzabile sono: $\boxed{\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}\sqrt{3}}$.

Casi limiti	
 $x = \frac{a}{2}$	 $x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

Punto B

L'area S del quadrilatero mistilineo $PQCR$ può essere espressa come differenza fra l'area del triangolo $\overset{\triangle}{ABC}$ e i due settori circolari $A\overset{\frown}{P}R$ e $B\overset{\frown}{P}Q$.

L'area $S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{8} a^2}$

L'area $S_{A\overset{\frown}{P}R} = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot \overline{AP}^2 = \boxed{\frac{\pi}{6} \cdot (a-x)^2}$ L'area $S_{B\overset{\frown}{P}Q} = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot \overline{BP}^2 = \boxed{\frac{\pi}{12} \cdot x^2}$

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{8} a^2 - \frac{\pi}{6} \cdot (a-x)^2 - \frac{\pi}{12} \cdot x^2 = \frac{\sqrt{3}}{8} a^2 - \frac{\pi}{6} a^2 - \frac{\pi}{6} x^2 + \frac{\pi}{6} \cdot 2ax - \frac{\pi}{12} \cdot x^2 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6} \right) \cdot a^2 - \frac{\pi}{4} x^2 + \frac{\pi}{3} ax = -\frac{\pi}{4} x^2 + \frac{\pi}{3} ax + \left(\frac{3\sqrt{3} - 4\pi}{24} \right) \cdot a^2 = -\frac{\pi}{4} x^2 + \frac{\pi}{3} ax + \left(\frac{3\sqrt{3} - 4\pi}{24} \right) \cdot a^2$$

In definitiva l'area richiesta è espressa dalla seguente funzione: $\boxed{S(x) = -\frac{\pi}{4} x^2 + \frac{\pi}{3} ax + \left(\frac{3\sqrt{3} - 4\pi}{24} \right) \cdot a^2}$

da studiare nell'intervallo $\boxed{\left[\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\sqrt{3} \right]}$.

La funzione $S(x)$ è una parabola con la concavità rivolta verso il basso.

L'ascissa del vertice è: $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{\pi}{3} a}{-2\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\pi}{3} a}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} a \cong \boxed{0{,}67\, a}$.

L'ordinata del vertice è: $y_V = -\frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{2}{3} a \right)^2 + \frac{\pi}{3} a \cdot \frac{2}{3} a + \left(\frac{3\sqrt{3} - 4\pi}{24} \right) \cdot a^2 = -\frac{\pi}{9} a^2 + \frac{2\pi}{9} a^2 + \left(\frac{3\sqrt{3} - 4\pi}{24} \right) \cdot a^2$

$$= \left[\frac{-8\pi + 16\pi + 9\sqrt{3} - 12\pi}{72} \right] \cdot a^2 = \left[\frac{9\sqrt{3} - 4\pi}{72} \right] \cdot a^2 \cong \boxed{0{,}04\, a^2}.$$

I valori della funzione $S(x)$ agli estremi dell'intervallo $\left[\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\sqrt{3} \right]$ sono:

$$S\left(\frac{a}{2} \right) = -\frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \frac{\pi}{3} a \cdot \frac{a}{2} + \left(\frac{3\sqrt{3} - 4\pi}{24} \right) \cdot a^2 = -\frac{\pi}{16} a^2 + \frac{\pi}{6} a^2 + \left(\frac{3\sqrt{3} - 4\pi}{24} \right) \cdot a^2 =$$

$$= \left[-\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{6} + \frac{3\sqrt{3} - 4\pi}{24} \right] \cdot a^2 = \left[\frac{-3\pi + 8\pi + 6\sqrt{3} - 8\pi}{48} \right] \cdot a^2 = \left[\frac{6\sqrt{3} - 3\pi}{48} \right] \cdot a^2 = \left[\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{16} \right] \cdot a^2 \cong \boxed{0{,}02\, a^2}$$

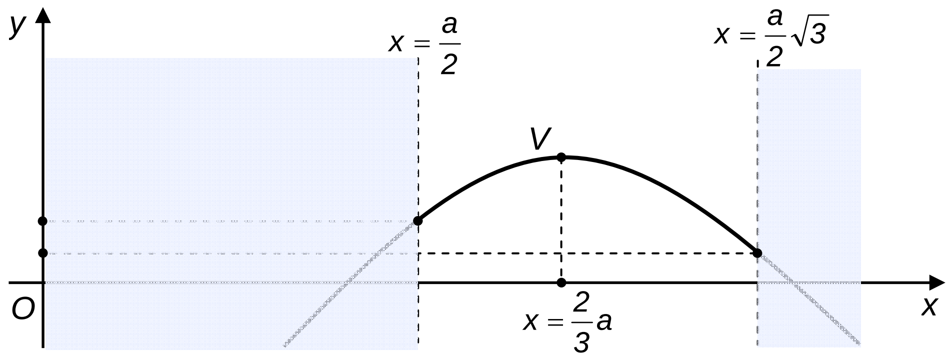
$$S\left(\frac{a}{2}\sqrt{3} \right) = -\frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{a}{2}\sqrt{3} \right)^2 + \frac{\pi}{3} a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} + \left(\frac{3\sqrt{3} - 4\pi}{24} \right) \cdot a^2 = -\frac{3\pi}{16} a^2 + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6} a^2 + \left(\frac{3\sqrt{3} - 4\pi}{24} \right) \cdot a^2 =$$

$$= \left[-\frac{3\pi}{16} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6} + \frac{3\sqrt{3} - 4\pi}{24} \right] \cdot a^2 = \left[\frac{-9\pi + 8\sqrt{3}\pi + 6\sqrt{3} - 8\pi}{48} \right] \cdot a^2 = \left[\frac{8\sqrt{3}\pi + 6\sqrt{3} - 17\pi}{48} \right] \cdot a^2 =$$

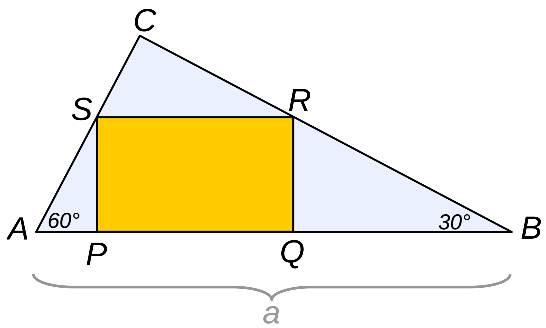
$$= \left[\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{8\sqrt{3} - 17}{48} \pi \right] \cdot a^2 = \left[\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{17 - 8\sqrt{3}}{48} \pi \right] \cdot a^2 = \left[\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{16} \cdot \frac{17 - 8\sqrt{3}}{3} \right] \cdot a^2 \cong \boxed{0{,}01\, a^2}.$$

Dal grafico della funzione $S(x)$ si ricava che:

- L'area minima si ha per $x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Essa vale : $S_{min} = \left[\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{8\sqrt{3}-17}{48}\pi\right]\cdot a^2$.
- L'area massima si ha per $x = \frac{2}{3}a$. Essa vale : $S_{Max} = \left[\frac{9\sqrt{3}-4\pi}{72}\right]\cdot a^2$.



Punto C



Ponendo $\overline{PS} = x$ con le limitazioni $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{4}a$ si ha:

$\Rightarrow \quad \overline{AP} = \overline{PS}\cdot tg\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

$\Rightarrow \quad \overline{BQ} = \overline{RQ}\cdot tg\,60° = \sqrt{3}x$

$\Rightarrow \quad \overline{PQ} = a - \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}x = a - \frac{4\sqrt{3}}{3}x$

Negli estremi $x = 0$ *e* $x = \frac{\sqrt{3}}{4}a$ *il rettangolo degenera nei segmenti* AB *e* CH *(base e altezza del triangolo)*

L'area del rettangolo è data da: $S_{PQRS} = \overline{PQ}\cdot\overline{PS} = \left(a - \frac{4\sqrt{3}}{3}x\right)\cdot x = -\frac{4\sqrt{3}}{3}x^2 + ax$.

La funzione da rendere massima è pertanto: $\boxed{h(x) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}x^2 + ax}$ con $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{4}a$.

Trattandosi di una parabola con concavità negativa, il valore massimo si ha in corrispondenza del vertice.

L'area massima si ha per : $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{a}{-2\frac{4\sqrt{3}}{3}} = \frac{a}{\frac{8\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{8\sqrt{3}}a = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{8}a}$.

L'area massima vale : $h_{Max} = y_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{8}a\right)^2 + a\cdot\frac{\sqrt{3}}{8}a =$

$= -\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3}{64}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 = -\frac{\sqrt{3}}{16}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{16}a^2}$.

Punto D – metodo 1

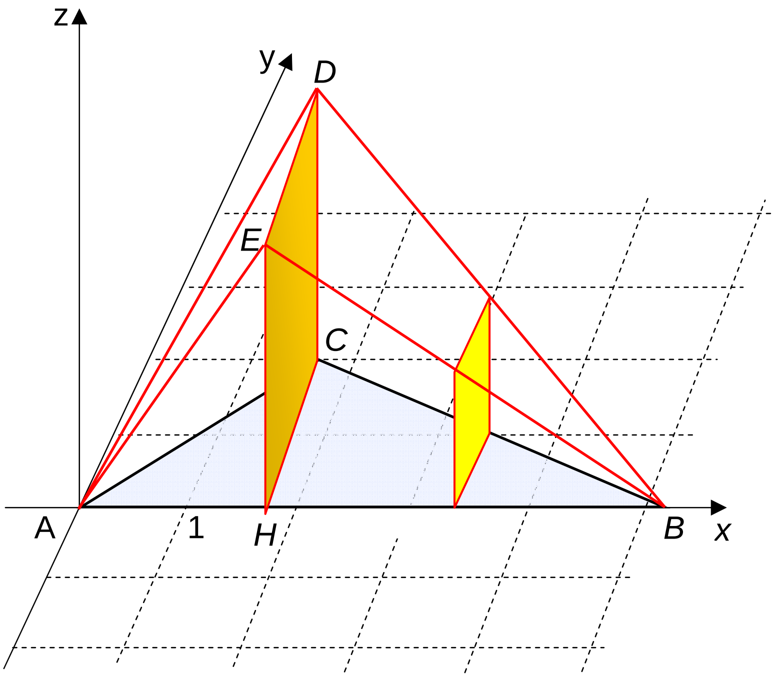
Il solido W si compone di due piramidi non rette avente la base quadrata $CDEH$ in comune.

Pertanto il suo volume è dato da:

$$V_W = \frac{1}{3}S_{CDEH}\cdot\overline{AH}+\frac{1}{3}S_{CDEH}\cdot\overline{BH} =$$

$$= \frac{1}{3}S_{CDEH}\cdot\left(\overline{AH}+\overline{BH}\right) = \frac{1}{3}\cdot\overline{CH}^2\cdot\overline{AB} =$$

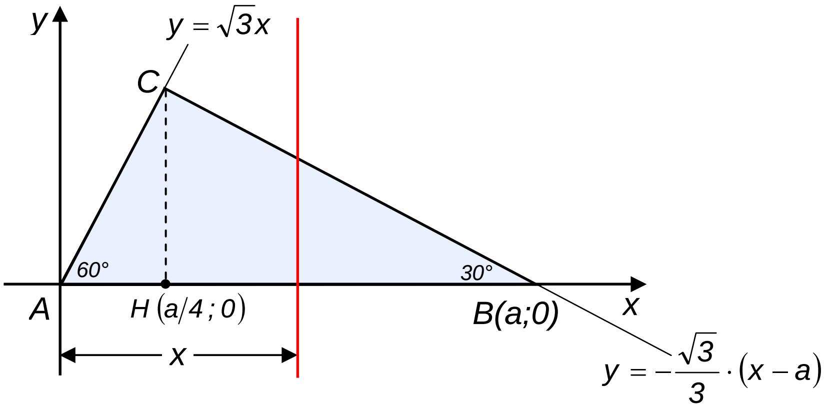
$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2\cdot a = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{16}a^2\cdot a = \boxed{\frac{a^3}{16}}.$$



Punto D – metodo 2

Il volume del solido W si può calcolare utilizzando il principio di Cavalieri (metodo delle fette).

Il lato del quadrato sezione varia, a seconda che la sezione intersechi il lato AC o il lato BC.



Chiamata x la distanza del piano sezione dal vertice A si ha:

Lungo il lato AC $\quad f_1(x)=\sqrt{3}x \quad \Rightarrow \quad$ l'area della fetta è: $S_1(x)=3x^2$

Lungo il lato BC $\quad f_2(x)=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-a) \quad \Rightarrow \quad$ l'area della fetta è: $S_2(x)=\frac{1}{3}(x-a)^2$

$$V=V_1+V_2 = \int_0^{\frac{a}{4}}S_1(x)\,dx+\int_{\frac{a}{4}}^{a}S_2(x)\,dx = \int_0^{\frac{a}{4}}3x^2\,dx+\int_{\frac{a}{4}}^{a}\frac{1}{3}(x-a)^2\,dx = \left[x^3\right]_0^{\frac{a}{4}}+\left[\frac{1}{9}\cdot(x-a)^3\right]_{\frac{a}{4}}^{a} =$$

$$= \frac{1}{64}a^3+\frac{1}{9}\cdot\left[(a-a)^3-\left(\frac{a}{4}-a\right)^3\right] = \frac{1}{64}a^3+\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{3}{4}a\right)^3 = \frac{1}{64}a^3+\frac{1}{9}\cdot\frac{27}{64}a^3 =$$

$$= \frac{1}{64}a^3+\frac{3}{64}a^3 = \boxed{\frac{a^3}{16}}.$$

Cambiando il verso dell'asse x, il volume V_2 può essere calcolato anche nel seguente modo:

$$V_2 = \int_0^{\frac{3}{4}a}\left[\frac{\sqrt{3}}{3}x\right]^2 dx = \int_0^{\frac{3}{4}a}\frac{1}{3}x^2\,dx = \left[\frac{1}{9}\cdot x^3\right]_0^{\frac{3}{4}a} = \frac{1}{9}\cdot\frac{27}{64}a^3 = \frac{3}{64}a^3.$$