

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

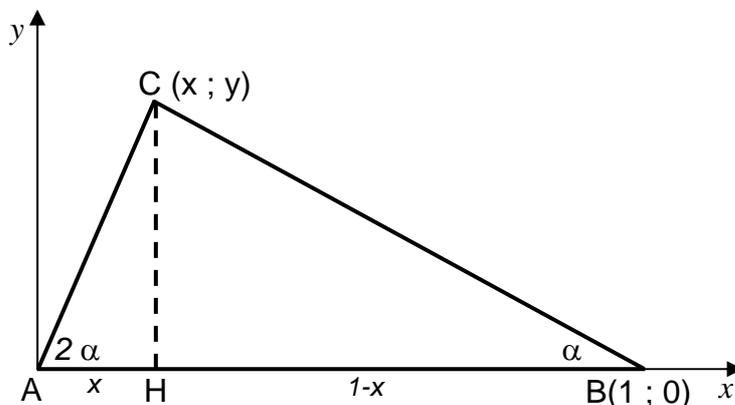
Problema 2

Punto 1

Conviene porre $\widehat{ABC} = \alpha$ e $\widehat{BAC} = 2\alpha$
 Inoltre conviene porre $AH = x$ da cui si ha:
 $BH = 1 - x$.

Dal triangolo rettangolo $\triangle ACH$ si ha:
 $y = x \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$ (1)

Dal triangolo rettangolo $\triangle BCH$ si ha:
 $y = (1 - x) \cdot \operatorname{tg} \alpha$ (2)



Ricordando che: $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ la (1) diventa: $y = x \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ (3)

Ricavando dalla (2) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{1 - x}$ e sostituendola nella (3) si ottiene:

$$y = x \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad y = x \cdot \frac{2 \cdot \frac{y}{1-x}}{1 - \left(\frac{y}{1-x}\right)^2}; \quad y = x \cdot \frac{\frac{2y}{1-x}}{\frac{(1-x)^2 - y^2}{(1-x)^2}}; \quad y = x \cdot \frac{2y}{1-x} \cdot \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 - y^2};$$

$$y = \frac{2xy \cdot (1-x)}{(1-x)^2 - y^2}; \quad y \cdot [(1-x)^2 - y^2] = 2xy \cdot (1-x).$$

Dividendo per $y \neq 0$ ($y=0 \Leftrightarrow$ altezza triangolo uguale a zero \Leftrightarrow il triangolo degenera in un segmento):

$$(1-x)^2 - y^2 = 2x \cdot (1-x); \quad 1 + x^2 - 2x - y^2 = 2x - 2x^2; \quad 1 + 3x^2 - 4x - y^2 = 0.$$

Punto 2 - 1° Metodo

L'equazione $1 + 3x^2 - 4x - y^2 = 0$ rappresenta l'equazione di un'iperbole traslata, infatti:

$$1 + 3x^2 - 4x - y^2 = 0; \quad 3x^2 - 4x - y^2 = -1; \quad 3 \cdot \left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) - y^2 = -1;$$

$$3 \cdot \left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) - y^2 = -1; \quad 3 \cdot \left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - 3 \cdot \frac{4}{9} - y^2 = -1;$$

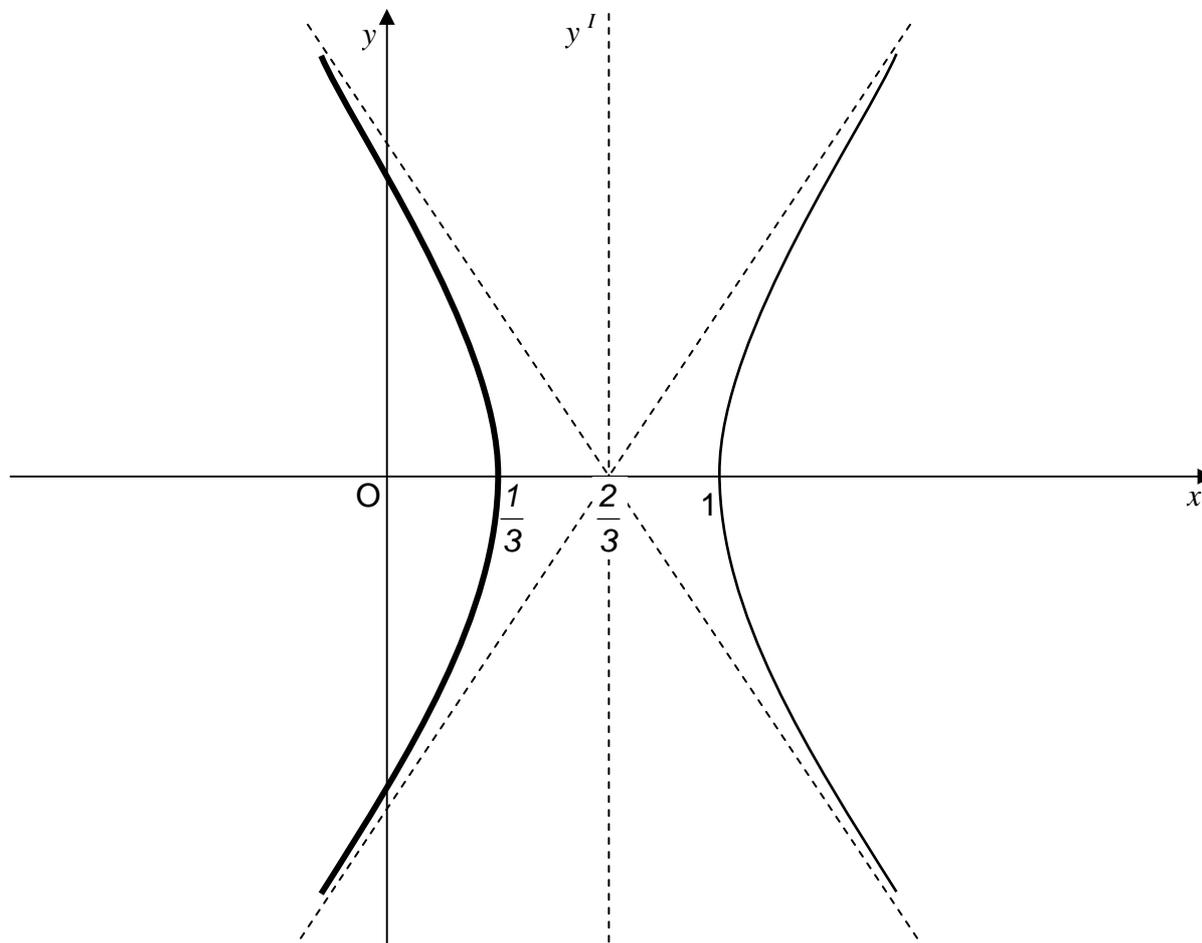
$$3 \cdot \left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - \frac{4}{3} - y^2 = -1; \quad 3 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{4}{3} - 1; \quad 3 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{3};$$

$$9 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - 3y^2 = 1; \quad \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1.$$

Effettuando una traslazione degli assi: $\begin{cases} x' = x - 2/3 \\ y' = y \end{cases}$ si ottiene la forma canonica dell'iperbole a centro:

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y'^2}{\frac{1}{3}} = 1 ; \text{ avente semiasse trasverso } a = \frac{1}{3}, \text{ semiasse non trasverso } b = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ed asintoti le rette:}$$

$$y' = \pm \frac{b}{a} x' ; \quad y' = \pm \sqrt{3} x' ; \text{ cioè, nel vecchio sistema } Oxy: \quad y = \pm \sqrt{3} \cdot (x - 2/3).$$



Il grafico del luogo geometrico richiesto è però limitato all'intervallo $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$, infatti:

l'angolo $\widehat{ABC} = \alpha$ utilizzato ha la seguente limitazione:

$$0 \leq \widehat{ABC} + \widehat{BAC} \leq 180^\circ ; \quad 0 \leq \alpha + 2\alpha \leq \pi ; \quad 0 \leq 3\alpha \leq \pi ; \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3} .$$

✘ Quando $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow \frac{1}{3}$, infatti dalla relazione: $\frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin 2\alpha}$ si ha: $\frac{AC}{BC} = \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha}$ ed

$$\text{essendo } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha} \stackrel{H}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha}{2 \cos 2\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\text{vuol dire che: } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}, \text{ cioè per } \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow AC \rightarrow \frac{1}{2} BC \quad (*)$$

Ma $\alpha \rightarrow 0 \Leftrightarrow$ il vertice C del triangolo si abbassa sulla base AB.

Pertanto in questa situazione limite $AC + BC = 1$.

Sostituendo in questa relazione il valore limite (*) si ottiene: $\frac{1}{2} BC + BC = 1 ; \quad BC + 2BC = 2 ;$

$$3BC = 2 ; \quad BC = 2/3 \Rightarrow AC = 1/3 \text{ e quindi: } x = 1/3.$$

✱ Quando $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{3} \Rightarrow x \rightarrow -\infty$

infatti quando $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{3}$, cioè $\hat{A}BC = \alpha \rightarrow 60^\circ$, l'angolo $\hat{B}AC = 2\alpha \rightarrow 120^\circ \Rightarrow \hat{A}CB \rightarrow 0^\circ$

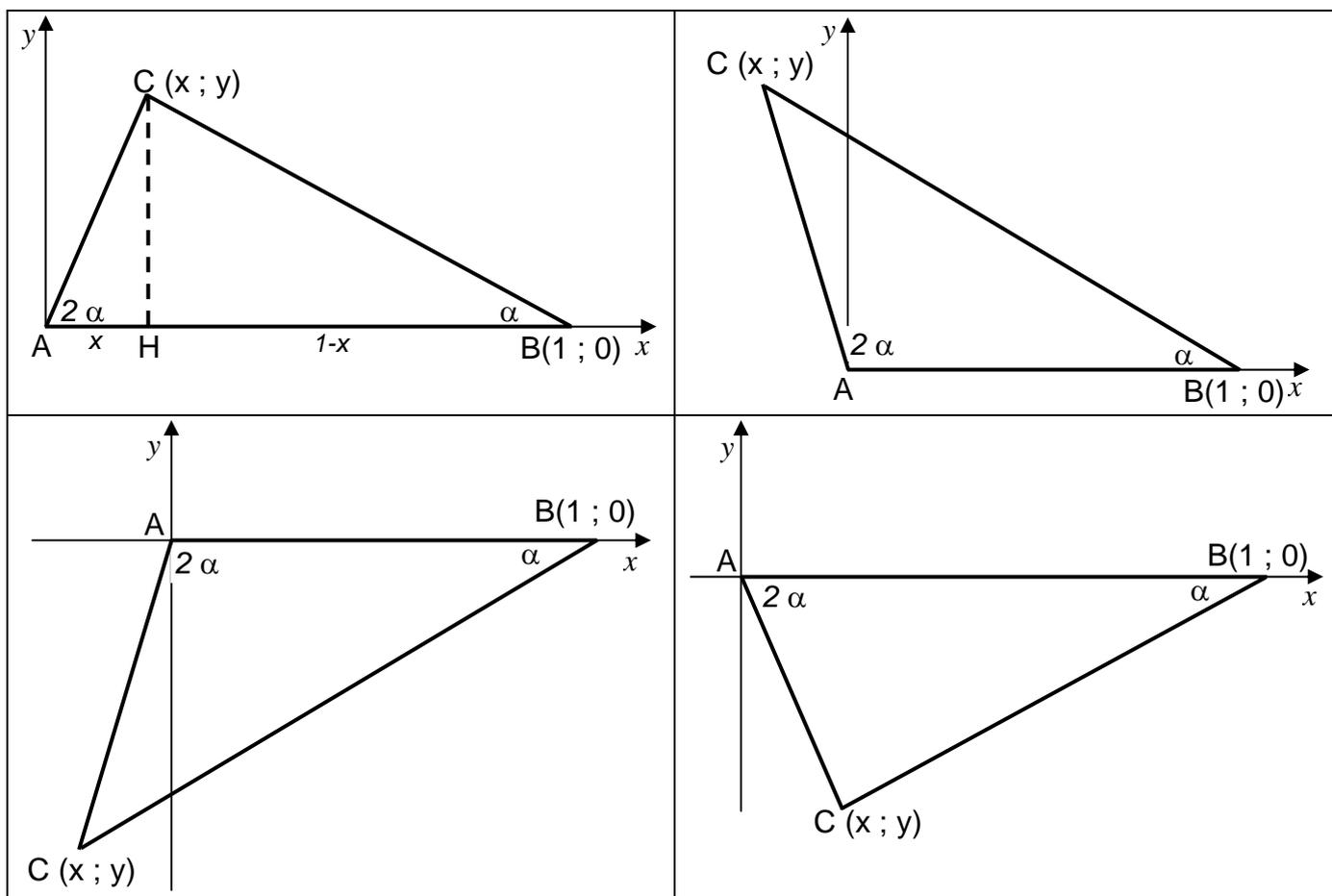
Pertanto il triangolo non si chiude, (le rette AC e BC risultano parallele).

In questa situazione limite $x_C \rightarrow -\infty$ (ascissa del vertice C), cioè $x \rightarrow -\infty$.

In definitiva l'intervallo entro cui varia la variabile x è $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$.

Situazioni grafiche limiti	
Caso $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{3}$	
Caso $\alpha \rightarrow 0$	

Per la variabile y non c'è nessuna limitazione poiché, come si evince dai grafici sottostanti, il vertice C può trovarsi in uno qualsiasi dei quattro quadranti.



II° Metodo

La rappresentazione grafica della curva di equazione: $1 + 3x^2 - 4x - y^2 = 0$ poteva ottenersi risolvendo l'equazione rispetto alla variabile $y = \pm\sqrt{3x^2 - 4x + 1}$ e studiando il grafico delle funzioni:

$$y = +\sqrt{3x^2 - 4x + 1} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{3x^2 - 4x + 1}.$$

Il grafico della funzione $y = +\sqrt{3x^2 - 4x + 1}$ si ottiene, tenendo conto della limitazione geometrica $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$, dallo studio dei seguenti punti:

Dominio: $3x^2 - 4x + 1 \geq 0$; $3x^2 - 4x + 1 = 0$; $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = 1$; $x \leq \frac{1}{3} \cup x \geq 1$; tenendo conto della limitazione geometrica, diventa: $C.E. = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$.

Simmetrie: La funzione, nel dominio $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$, non ha simmetrie di alcun genere.

Intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} y = +\sqrt{3x^2 - 4x + 1} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = +\sqrt{3x^2 - 4x + 1} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 3x^2 - 4x + 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1/3; x_2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{3}; 0\right)$$
$$\begin{cases} y = +\sqrt{3x^2 - 4x + 1} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \sqrt{1} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0; 1)$$

Segno di $f(x)$: La funzione è sempre positiva, essendo una funzione radice di indice pari.

Asintoti verticali: La funzione non ha asintoti verticali.

Asintoti orizzontali: La funzione non ha asintoti orizzontali. Infatti: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 4x + 1} = +\infty + \infty = +\infty$

Asintoti obliqui $y = mx + q$: La funzione ha l'asintoto obliquo a sinistra: $y = -\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}}$. Infatti:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\sqrt{3}. \\ q &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{3x^2 - 4x + 1} - (-\sqrt{3}x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{3x^2 - 4x + 1} + \sqrt{3}x] = +\infty - \infty = ? \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{3x^2 - 4x + 1} + \sqrt{3}x \right] \cdot \frac{\sqrt{3x^2 - 4x + 1} - \sqrt{3}x}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1} - \sqrt{3}x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 4x + 1 - 3x^2}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1} - \sqrt{3}x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + 1}{|x| \cdot \sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{3}x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + 1}{-x \cdot \sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{3}x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \cdot \left(4 - \frac{1}{x}\right)}{-x \cdot \left[\sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{3}\right]} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - \frac{1}{x}}{\sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Crescenza e decrescenza:

$$f'(x) = \frac{6x-4}{2\sqrt{3x^2-4x+1}} = \frac{2 \cdot (3x-2)}{2\sqrt{3x^2-4x+1}} = \frac{3x-2}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$$

$$f'(x) = 0 ; \frac{3x-2}{\sqrt{3x^2-4x+1}} = 0 ; 3x-2 = 0 ; x = \frac{2}{3} \notin C.E. \text{ e quindi non accettabile.}$$

Pertanto la derivata prima non si annulla mai.

$$f'(x) > 0 ; \frac{3x-2}{\sqrt{3x^2-4x+1}} > 0 ; 3x-2 > 0 ; x > \frac{2}{3}$$

$\notin C.E.$

Pertanto la derivata prima è sempre negativa in $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$,

quindi la funzione è strettamente decrescente in tutto

l'intervallo $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$.

Punti di non derivabilità: La funzione non è derivabile in $x = \frac{1}{3}$,

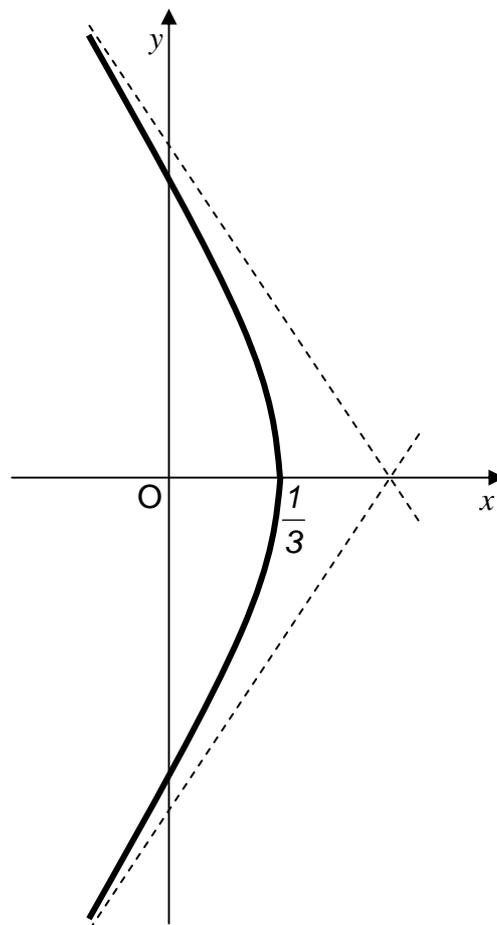
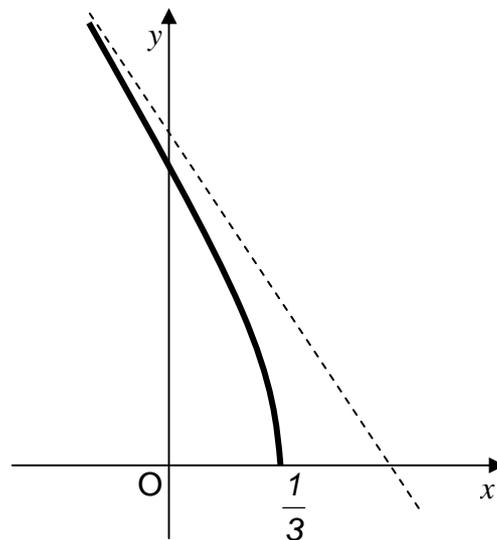
$$\text{infatti: } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} \frac{3x-2}{\sqrt{3x^2-4x+1}} = -\infty$$

$$(\text{Essendo } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} \sqrt{3x^2-4x+1} = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} (3x-2) = -1)$$

Il grafico della funzione $y = -\sqrt{3x^2-4x+1}$ si ottiene simmetrizzando, rispetto all'asse y, il grafico appena studiato.

In definitiva la rappresentazione grafica del luogo geometrico:

$$1 + 3x^2 - 4x - y^2 = 0 \text{ è quella a lato.}$$



Punto 3

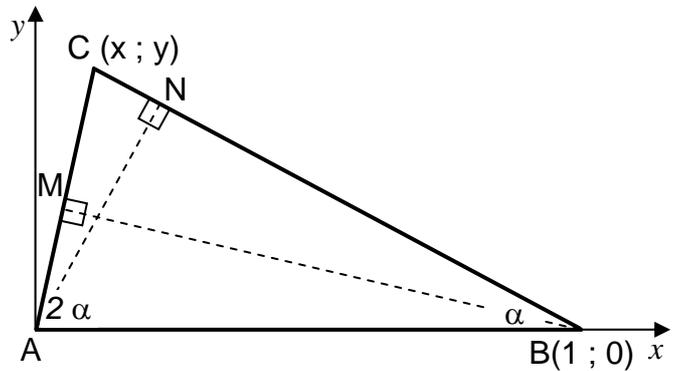
La funzione da massimizzare è $s(\alpha) = AN^2 + BM^2$

Dal triangolo rettangolo $\triangle ABM$ si ha: $\text{sen } 2\alpha = \frac{BM}{AB}$

ed essendo $AB = 1$ si ottiene: $BM = \text{sen } 2\alpha$

Dal triangolo rettangolo $\triangle ABN$ si ha: $\text{sen } \alpha = \frac{AN}{AB}$

ed essendo $AB = 1$ si ottiene: $AN = \text{sen } \alpha$



La funzione da massimizzare diventa pertanto: $s(\alpha) = \text{sen}^2 2\alpha + \text{sen}^2 \alpha$; con $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$.

Essa si trasforma in: $s(\alpha) = \text{sen}^2 2\alpha + \text{sen}^2 \alpha = (2\text{sen } \alpha \cos \alpha)^2 + \text{sen}^2 \alpha =$
 $= 4\text{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 4\text{sen}^2 \alpha \cdot (1 - \text{sen}^2 \alpha) + \text{sen}^2 \alpha = 4\text{sen}^2 \alpha - 4\text{sen}^4 \alpha + \text{sen}^2 \alpha =$
 $= 5\text{sen}^2 \alpha - 4\text{sen}^4 \alpha$.

Occorre quindi trovare il valore di α per cui $s(\alpha) = 5\text{sen}^2 \alpha - 4\text{sen}^4 \alpha$ è massima in $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

La derivata prima è: $s'(\alpha) = 10\text{sen } \alpha \cos \alpha - 16\text{sen}^3 \alpha \cos \alpha = 2\text{sen } \alpha \cos \alpha \cdot (5 - 8\text{sen}^2 \alpha)$

La derivata prima si annulla in: $s'(\alpha) = 0$; $2\text{sen } \alpha \cos \alpha \cdot (5 - 8\text{sen}^2 \alpha) = 0$;

$\text{sen } \alpha = 0$ $\alpha = 0$ $\alpha = 0$

$\cos \alpha = 0$ *mai in $(0, \pi/3)$* *mai in $(0, \pi/3)$*

$5 - 8\text{sen}^2 \alpha = 0$ $\text{sen } \alpha = \pm \sqrt{5/8}$ $\alpha = 52^\circ 14'$

La derivata prima è positiva in: $s'(\alpha) > 0$;

$2\text{sen } \alpha \cos \alpha \cdot (5 - 8\text{sen}^2 \alpha) > 0$;

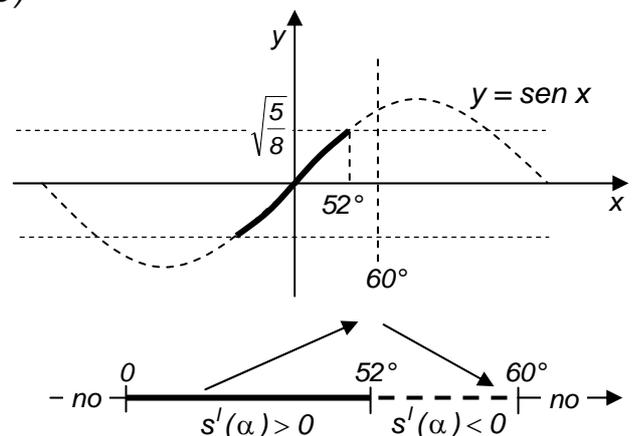
$\text{sen } \alpha > 0$ $\forall \alpha \in (0, \pi/3)$

$\cos \alpha > 0$ $\forall \alpha \in (0, \pi/3)$

$5 - 8\text{sen}^2 \alpha > 0$ $0 < \alpha < 52^\circ 14'$

La derivata prima è positiva per: $0 < \alpha < 52^\circ 14'$

La derivata prima è negativa per: $52^\circ 14' < \alpha < 60^\circ$



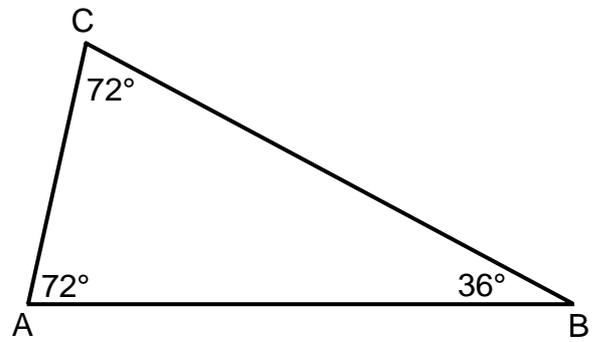
Concludendo la funzione $s(\alpha) = 5\text{sen}^2 \alpha - 4\text{sen}^4 \alpha$ è massima per $\alpha = 52^\circ 14'$.

Punto 4

Se l'angolo $\hat{ABC} = 36^\circ \Rightarrow \hat{BAC} = 72^\circ$.

Inoltre anche l'angolo $\hat{BCA} = 72^\circ$

perché: $\hat{BCA} = 180^\circ - \hat{ABC} - \hat{BAC}$



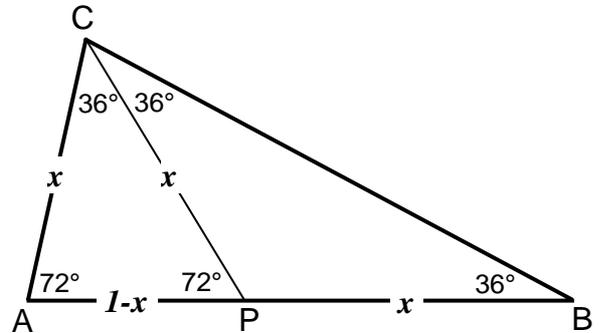
Sia CP la bisettrice dell'angolo $\hat{BCA} = 72^\circ$.

L'angolo $\hat{APC} = 72^\circ$

I triangoli $\triangle ABC$, $\triangle BCP$ e $\triangle ACP$ sono isosceli.

Pertanto, ponendo $PB = x$ si ha:

$CP = x$, $AC = x$ e $AP = 1 - x$



Dalla similitudine dei triangoli isosceli $\triangle ABC$ e $\triangle ACP$ si ha:

$AB : AC = AC : AP$; $1 : x = x : (1 - x)$; $x^2 = 1 - x$; $x^2 + x - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0 & \text{non accettabile} \\ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0 & \text{accettabile} \end{cases}$$