ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Sessione Ordinaria 2007

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Problema 1

Punto 1

Per studiare la monotonia della funzione $g(x)=a^x+a^{-x}$ occorre esaminare il segno della derivata prima $g^I(x)=a^x\cdot \ln a-a^{-x}\ln a = \ln a\cdot(a^x-a^{-x})$.
Essendo, per ipotesi, $a>0$, occorre distinguere i seguenti due casi:

- $a>1$
  Per $a>1$, $\ln a>0 \quad \Rightarrow \quad g^I(x)>0$ quando $a^x-a^{-x}>0$
  e cioè: $a^x>a^{-x}$; $x>-x$; $2x>0$; $x>0$.
- $0<a<1$
  Per $0<a<1$, $\ln a<0 \quad \Rightarrow \quad g^I(x)>0$ quando $a^x-a^{-x}<0$
  e cioè: $a^x<a^{-x}$; ed essendo la base $0<a<1$ cambia il verso della disuguaglianza, cioè: $x>-x$; $2x>0$; $x>0$.

Pertanto, in entrambi i casi si ha che:
$g^I(x)>0$ per $x>0$ e $g^I(x)<0$ per $x<0$.

Ciò equivale a dire che:

$g(x)$ è strettamente crescente per $x>0$
$g(x)$ è strettamente decrescente per $x<0$.

Punto 2a

Il grafico della funzione $f(x)=e^x+e^{-x}$ si ottiene dallo studio dei seguenti punti:
- La funzione è definita e continua in $(-\infty,+\infty)$.
- La funzione presenta una simmetria rispetto all'asse x, infatti:
  $f(-x)=e^{-x}+e^{-(-x)}=e^{-x}+e^x=f(x)$.
- Le intersezioni con gli assi cartesiani sono:

$$\begin{cases} y=e^x+e^{-x} \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=e^0+e^0 \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=1+1 \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=2 \\ x=0 \end{cases} \quad A(0;2)$$

$$\begin{cases} y=e^x+e^{-x} \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0=e^x+e^{-x} \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} e^x=-e^{-x} \\ y=0 \end{cases}$$

Sistema impossibile perché: il I° membro è sempre positivo, mentre il II° è sempre negativo.

- La curva non ha asintoti di alcun genere, infatti:
  La curva non ha asintoti verticali, perché la funzione è continua su tutto l'asse reale.
  La curva non ha asintoti orizzontali perché:

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x+e^{-x})=+\infty \quad \text{poiché} \quad \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$$

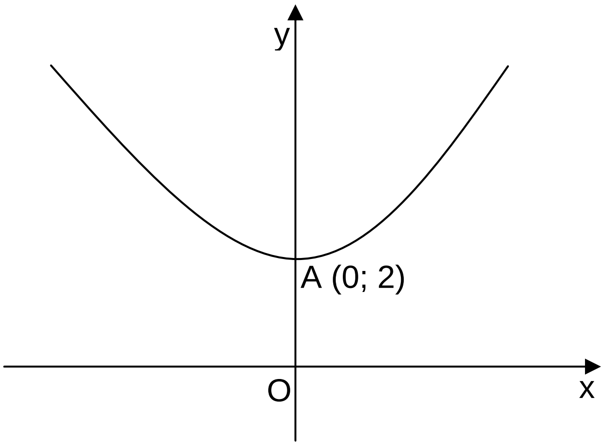
$$\lim_{x\to-\infty}(e^x+e^{-x})=+\infty \quad \text{poiché} \quad \lim_{x\to-\infty}e^x=0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$$

La curva non ha asintoti obliqui del tipo $y = mx + q$ perché:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{x} = \frac{+\infty}{\pm\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{1} = +\infty .$$

- La derivata prima è: $f^I(x) = e^x - e^{-x}$. Essa si annulla in $x = 0$, infatti:

  $e^x - e^{-x} = 0$; $e^x = e^{-x}$; $x = -x$; $2x = 0$; $x = 0$.
- Dallo studio del <u>*punto 1*</u> si conosce la monotonia della funzione:
  $f(x)$ è strettamente crescente per $x > 0$
  $f(x)$ è strettamente decrescente per $x < 0$
  Pertanto in $x = 0$ c'è un minimo relativo ed assoluto.
  Il punto di minimo assoluto ha coordinate $A(0;2)$ (*coordinate trovate in precedenza*).
- La derivata seconda è: $f^{II}(x) = e^x + e^{-x}$.
  Essa non si annulla mai, infatti:
  $e^x + e^{-x} = 0$; $e^x = -e^{-x}$; equazione impossibile, perché il I° membro è sempre positivo, mentre il II° è sempre negativo.
- La derivata seconda è sempre positiva, poiché $e^x + e^{-x}$ è la somma di due quantità sempre positive.
  Pertanto la curva volge la concavità sempre verso l'alto.



<u>*Punto 2b*</u>

La funzione $h(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ ha anche la seguente espressione: $h(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$, infatti:

$$h(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{\frac{(e^x)^2 + 1}{e^x}} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} .$$

Il suo grafico si ottiene dallo studio dei seguenti punti:

- La funzione è definita e continua in $(-\infty, +\infty)$, infatti il denominatore non si annulla mai, perchè somma di quantità sempre positive.
- La funzione presenta una simmetria rispetto all'asse x, infatti:

  $$f(-x) = \frac{1}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = \frac{1}{e^{-x} + e^x} = f(x)$$
- Le intersezioni con gli assi cartesiani sono:

  $$\begin{cases} y = \frac{1}{e^x + e^{-x}} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{e^0 + e^0} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{1+1} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases} \quad A\left(0; \frac{1}{2}\right)$$

  $$\begin{cases} y = \frac{1}{e^x + e^{-x}} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = \frac{1}{e^x + e^{-x}} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$ Sistema impossibile.

- La curva non ha asintoti verticali, perché la funzione è continua su tutto l'asse reale.
  La curva ha l'asintoto orizzontale $y = 0$ (*a destra e a sinistra*), infatti:

  $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} = 0$ poiché $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

  $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} = 0$ poiché $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

La curva non ha asintoti obliqui.

- La derivata prima è: $f'(x)=\dfrac{-e^{x}+e^{-x}}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}$, Infatti:

$$f'(x)=\frac{0\cdot\left(e^{x}+e^{-x}\right)-1\cdot\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}=\frac{-e^{x}+e^{-x}}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}$$

- La derivata prima si annulla in $x=0$, infatti:

$$\frac{-e^{x}+e^{-x}}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}=0\ ;\quad -e^{x}+e^{-x}=0\ ;\quad e^{x}=e^{-x}\ ;\quad x=-x;\quad 2x=0\ ;\quad x=0\ .$$

- La derivata prima è positiva per $x<0$, mentre è negativa per $x>0$, infatti:

$$\frac{-e^{x}+e^{-x}}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}>0\ ;\quad -e^{x}+e^{-x}>0\ ;\quad e^{-x}>e^{x}\ ;\quad -x>x\ ;\quad -2x>0\ ;\quad x<0\ .$$

- Pertanto in $x=0$ c'è un massimo relativo ed assoluto.

  Il punto di massimo assoluto ha coordinate $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ (*coordinate trovate in precedenza*).

- La derivata seconda è: $f''(x)=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}-6}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{3}}$, infatti:

$$f''(x)=\frac{\left(-e^{x}-e^{-x}\right)\cdot\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}-\left(-e^{x}+e^{-x}\right)\cdot 2\cdot\left(e^{x}+e^{-x}\right)\cdot\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{\left[\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}\right]^{2}}=$$

$$=\frac{\left(e^{x}+e^{-x}\right)\cdot\left[\left(-e^{x}-e^{-x}\right)\cdot\left(e^{x}+e^{-x}\right)-\left(-e^{x}+e^{-x}\right)\cdot 2\cdot\left(e^{x}-e^{-x}\right)\right]}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{4}}=$$

$$=\frac{\left(-e^{x}-e^{-x}\right)\cdot\left(e^{x}+e^{-x}\right)-\left(-e^{x}+e^{-x}\right)\cdot 2\cdot\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{3}}=$$

$$=\frac{-\left(e^{x}+e^{-x}\right)\cdot\left(e^{x}+e^{-x}\right)+2\cdot\left(e^{x}-e^{-x}\right)\cdot\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{3}}=\frac{-\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}+2\cdot\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{3}}=$$

$$=\frac{-e^{2x}-e^{-2x}-2\cdot e^{x}\cdot e^{-x}+2\cdot\left(e^{2x}+e^{-2x}-2\cdot e^{x}\cdot e^{-x}\right)}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{3}}=$$

$$\frac{-e^{2x}-e^{-2x}-2+2e^{2x}+2e^{-2x}-4}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{3}}=\frac{e^{2x}+e^{-2x}-6}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{3}}\ .$$

- La derivata seconda si annulla in $x_1=log_2\left(\sqrt{2}-1\right)$ e $x_2=log_2\left(\sqrt{2}+1\right)$, infatti:

$$\frac{e^{2x}+e^{-2x}-6}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{3}}=0\ ;\quad e^{2x}+e^{-2x}-6=0\ ;$$

  Ponendo $e^{2x}=t$; si ottiene l'equazione: $t+\dfrac{1}{t}-6=0$; $t^{2}-6t+1=0$;

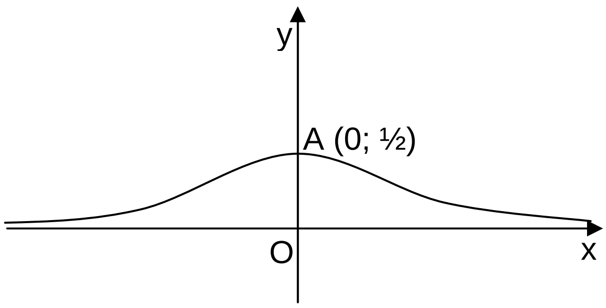
$$t_{1,2}=-b/2\pm\sqrt{(b/2)^{2}-c}=3\pm\sqrt{9-1}=3\pm\sqrt{8}=3\pm2\sqrt{2}\ .$$

  Ritornando alla incognita x si ottiene: $e^{2x}=3\pm2\sqrt{2}$; applicando il log_e ad ambo i membri si ha: $log_e e^{2x}=log_e(3\pm2\sqrt{2})$; $2x\cdot log_e e=log_e(3\pm2\sqrt{2})$; essendo $log_e e=1$ si ottiene: $2x=log_e(3\pm2\sqrt{2})$; da cui:

$$x = \frac{1}{2} \cdot log_e(3 \pm 2\sqrt{2}) \;=\; log_e(3 \pm 2\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} \;=\; log_e \sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}} \;=\; log_e \sqrt{2 + 1 \pm 2\sqrt{2}} \;=$$

$$= log_e \sqrt{\left(\sqrt{2} \pm 1\right)^2} \;=\; log_e\left(\sqrt{2} \pm 1\right) \;=\; \begin{matrix} log_e\left(\sqrt{2} - 1\right) \cong -0,88 \\ log_e\left(\sqrt{2} + 1\right) \cong +0,88 \end{matrix}$$

- La derivata seconda è positiva per $x < log_2\left(\sqrt{2} - 1\right)$ e $x > log_2\left(\sqrt{2} + 1\right)$
  La derivata seconda è negativa per $log_2\left(\sqrt{2} - 1\right) < x < log_2\left(\sqrt{2} + 1\right)$, infatti:
  $\frac{e^{2x} + e^{-2x} - 6}{\left(e^x + e^{-x}\right)^3} > 0$; essendo il denominatore sempre positivo (somma di quantità sempre positive) è sufficiente studiare soltanto il segno del numeratore: $e^{2x} + e^{-2x} - 6 > 0$;
  Ponendo $e^{2x} = t$; si ottiene la disequazione: $t + \frac{1}{t} - 6 > 0$; $t^2 - 6t + 1 > 0$; le cui soluzioni sono: $t < 3 - 2\sqrt{2}$ e $t > 3 + 2\sqrt{2}$ Ritornando alla incognita x si ottengono:
  $x < log_e\left(\sqrt{2} - 1\right)$ e $x > log_e\left(\sqrt{2} + 1\right)$, in tale intervallo la curva volge la concavità verso l'alto.
  Per $log_e\left(\sqrt{2} - 1\right) < x < log_e\left(\sqrt{2} + 1\right)$ la curva volge la concavità verso il basso.
- Per $x_1 = log_2\left(\sqrt{2} - 1\right)$ e $x_2 = log_2\left(\sqrt{2} + 1\right)$ si hanno due Flessi.
- Il grafico è quello a lato.



<u>*Osservazione*</u>

Il grafico della funzione $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ poteva essere ricavato in maniera sommaria, dalle seguenti considerazioni:

$f(x)$	$\frac{1}{f(x)}$
Crescente in (a,b)	Decrescente in (a,b)
Decrescente in (a,b)	Crescente in (a,b)
x_0 Max relativo	x_0 Min relativo
x_0 Min relativo	x_0 Max relativo
Si annulla in x_0	Non è definita in x_0
$\rightarrow\ \infty$	$\rightarrow\ 0$
$\rightarrow\ 0$	$\rightarrow\ \infty$

Punto 3

Occorre calcolare innanzitutto l'integrale indefinito $\int \frac{1}{f(x)} dx$.

$$\int \frac{1}{f(x)} dx = \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{1}{e^x + \frac{1}{e^x}} dx = \int \frac{1}{\frac{\left(e^x\right)^2 + 1}{e^x}} dx = \int \frac{e^x}{1 + (e^x)^2} dx = arctg\ e^x + k$$

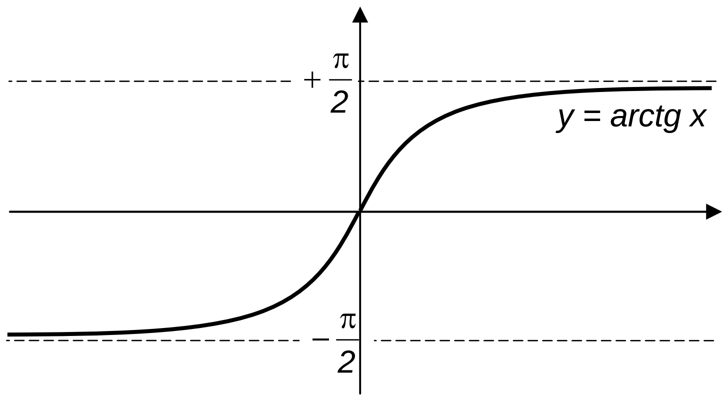
ottenuto applicando l'integrale immediato $\int \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2} dx = arctg\ f(x) + k$.

Pertanto l'integrale improprio vale:

$$\int_0^t \frac{1}{f(x)} dx = \left[arctg\ e^x\right]_0^t = arctg\ e^t - arctg\ e^0 = arctg\ e^t - \frac{\pi}{4}.$$

Essendo poi il $\lim_{t \to +\infty} arctg\ e^t = +\frac{\pi}{2}$

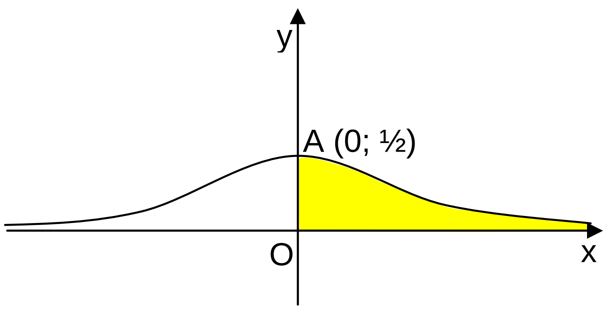
(grafico a lato) si ha:



$$\lim_{t \to +\infty} \left[\int_0^t \frac{1}{f(x)} dx \right] = \lim_{t \to +\infty} \left[arctg\ e^t - \frac{\pi}{4} \right] =$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Tale limite rappresenta l'area della regione illimitata compresa fra il grafico della funzione $\frac{1}{f(x)}$ e l'asse x nell'intervallo $(0,+\infty)$.



Esso è chiamato integrale improprio o generalizzato.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

Punto 4

Ricordando che $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [arctg\ x]_0^1 = \frac{\pi}{4} \cong 0{,}7853981634$.

Per calcolare un valore approssimato di $\frac{\pi}{4}$ si può utilizzare uno dei seguenti metodi:

Metodo dei rettangoli

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{x_n - x_0}{n} \cdot \left[\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right] \quad \text{oppure} \quad \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{x_n - x_0}{n} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right]$$

Metodo dei trapezi

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{x_n - x_0}{n} \cdot \left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

Metodo delle parabole

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{1}{3} \cdot \frac{x_n - x_0}{n} \cdot [f(x_0)+f(x_n)+4\cdot[f(x_1)+f(x_3)+...+f(x_{n-1})]+2\cdot[f(x_2)+f(x_4)+...+f(x_{n-2})]]$$

con n numero pari.

Le tre procedure portano ad un calcolo sempre più preciso dell'area con l'aumentare del numero n di suddivisioni dell'intervallo $(0;1)$ in intervallini di ampiezza $\frac{x_n - x_0}{n}$.

Il calcolo può essere effettuato in modo veloce utilizzando un foglio elettronico come Microsoft Excel (vedi il file *Integrazione numerica.xls*).

Utilizzando il Metodo dei trapezi e suddividendo l'intervallo $(0;1)$ in 10 intervallini si ottiene:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \cong S_{10} = \frac{1-0}{10} \cdot \left[\frac{f(0)+f(1)}{2} + \sum_{i=1}^{9} f(x_i)\right] .$$

Essendo:

$$f(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1 \qquad f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{100}} = \frac{100}{101} \qquad f\left(\frac{2}{10}\right) = \frac{1}{1+\frac{4}{100}} = \frac{100}{104}$$

$$f\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{1}{1+\frac{9}{100}} = \frac{100}{109} \qquad f\left(\frac{4}{10}\right) = \frac{1}{1+\frac{16}{100}} = \frac{100}{116} \qquad f\left(\frac{5}{10}\right) = \frac{1}{1+\frac{25}{100}} = \frac{100}{125}$$

$$f\left(\frac{6}{10}\right) = \frac{1}{1+\frac{6}{100}} = \frac{100}{136} \qquad f\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{1}{1+\frac{49}{100}} = \frac{100}{149} \qquad f\left(\frac{8}{10}\right) = \frac{1}{1+\frac{64}{100}} = \frac{100}{164}$$

$$f\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{1}{1+\frac{81}{100}} = \frac{100}{181} \qquad f(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$$

Si ottiene:

$$S_{10} = \frac{1}{10} \cdot \left[\frac{1+\frac{1}{2}}{2} + \frac{100}{101} + \frac{100}{104} + \frac{100}{109} + \frac{100}{116} + \frac{100}{125} + \frac{100}{136} + \frac{100}{149} + \frac{100}{164} + \frac{100}{181} \right] \cong$$

$$\cong \frac{1}{10} \cdot [0{,}75 + 0{,}9901 + 0{,}9615 + 0{,}9174 + 0{,}8621 + 0{,}8 + 0{,}7353 + 0{,}6711 + 0{,}6098 + 0{,}5525] \cong$$

$$\cong \frac{1}{10} \cdot 7{,}8498 \cong 0{,}785 \; .$$