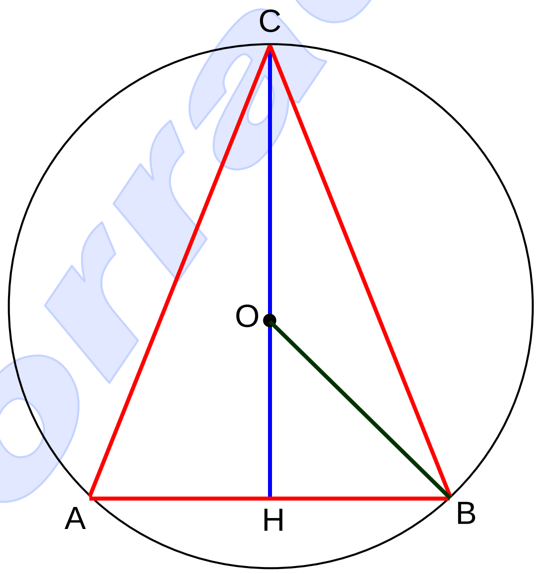
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Sessione Ordinaria 2007

CORSO DI ORDINAMENTO

Problema 2



<u>*Punto 1*</u>

Posto $OH = x$ con $0 \le x \le r$

Essendo $BO = r \quad \Rightarrow \quad BH = \sqrt{r^2 - x^2}$

La funzione da rendere massima è:

$$S(x) = \frac{1}{2} AB \cdot CH \; = \; (x + r) \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$$

La derivata prima è:

$$S' = 1 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + (x + r) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{r^2 - x^2 - x \cdot (x + r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r^2 - x^2 - x^2 - rx}{\sqrt{r^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{-2x^2 - rx + r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

La derivata prima si annulla in:

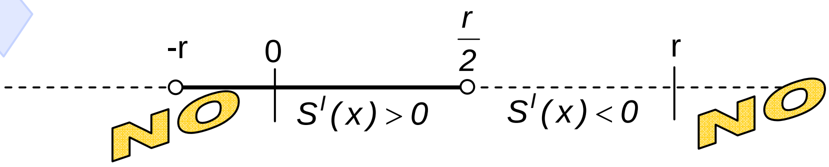
$$S' = 0 \; ; \quad \frac{-2x^2 - rx + r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \; ; \quad -2x^2 - rx + r^2 = 0 \; ; \quad 2x^2 + rx - r^2 = 0 \; ;$$

$$x_{1,2} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 8r}}{2 \cdot 2} = \frac{-r \pm 3r}{4} = \begin{array}{l} x_1 = -r \\ x_2 = \dfrac{r}{2} \end{array}$$

Il segno della derivata prima è data da:

$$S' > 0 \; ; \quad \frac{-2x^2 - rx + r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} > 0 \; ;$$

$$-2x^2 - rx + r^2 > 0 \; ; \quad -r < x < \frac{r}{2}$$



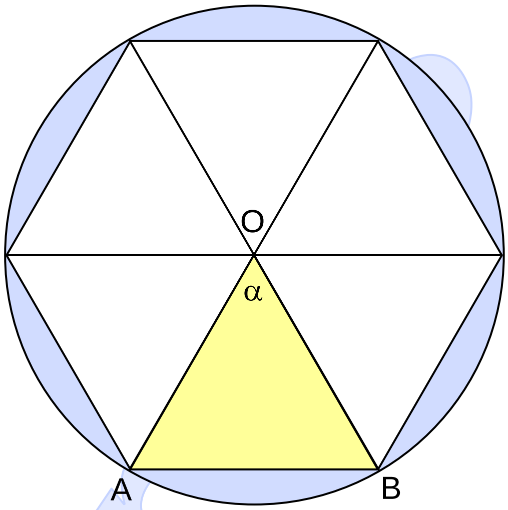
Pertanto l'area del triangolo $S(x)$ è massima per $x = \dfrac{r}{2}$.

Il che equivale a dire che il triangolo di area massima è equilatero. Infatti se $x = \dfrac{r}{2} \quad \Rightarrow$

$$CH = x + r = \frac{r}{2} + r = \frac{3}{2} r \; ; \qquad BH = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} r \; ; \qquad AB = \sqrt{3}\, r$$

$$BC = \sqrt{CH^2 + BH^2} = \sqrt{\frac{9}{4} r^2 + \frac{3}{4} r^2} = \sqrt{\frac{12}{4} r^2} = \sqrt{3}\, r \; .$$

Punto 2a



L'area del poligono di n lati inscritto in una circonferenza di raggio r può essere ottenuta come somma delle aree degli n triangoli isosceli congruenti al triangolino $A\overset{\Delta}{B}O$ che ha lato r, base AB e angolo al vertice $\alpha = A\hat{O}B$ di ampiezza $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.

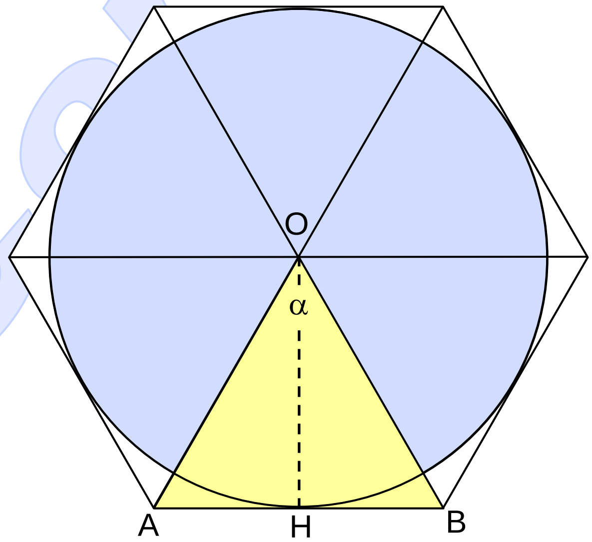
Essendo l'area del triangolo $A\overset{\Delta}{B}O$:

$$S_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \cdot sen\,\alpha \;=\; \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot sen\frac{2\pi}{n} \quad \Rightarrow$$

L'area del poligono di n lati inscritto nella circonferenza è:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot sen\frac{2\pi}{n}$$

Punto 2b



L'area del poligono di n lati circoscritto alla circonferenza di raggio r può essere ottenuta come somma delle aree degli n triangoli isosceli congruenti al triangolino $A\overset{\Delta}{B}O$ che ha altezza r, base AB e angolo al vertice $\alpha = A\hat{O}B$ di ampiezza $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.

Dal triangolo rettangolo $A\overset{\Delta}{H}O$ si ha:

$AH = OH \cdot tg\, A\hat{O}H$; cioè:

$$AH = r \cdot tg\frac{\alpha}{2} \;;\quad AH = r \cdot tg\frac{\frac{2\pi}{n}}{2} \;;\quad AH = r \cdot tg\frac{\pi}{n}\,.$$

Pertanto l'area del triangolo $A\overset{\Delta}{B}O$ è: $S_{ABO} = \frac{AB}{2} \cdot OH \;=\; r \cdot tg\frac{\pi}{n} \cdot r \;=\; r^2 \cdot tg\frac{\pi}{n} \quad \Rightarrow$

L'area del poligono di n lati circoscritto alla circonferenza di raggio r è: $S_n = n \cdot r^2 \cdot tg\frac{\pi}{n}$.

Punto 3

Al crescere del numero di lati, $n \to \infty$, sia il poligono inscritto che quello circoscritto tendono ad approssimare il cerchio. Pertanto il valore di questo limite deve uguagliare l'area del cerchio. Infatti:

$$\lim_{n\to\infty} S_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot sen\frac{2\pi}{n} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{sen\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \;=\; \pi r^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{sen\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \;=\; \pi r^2\,.$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n \;=\; \lim_{n\to\infty} n \cdot r^2 \cdot tg\frac{\pi}{n} \;=\; \lim_{n\to\infty} n \cdot r^2 \cdot \frac{\pi}{n} \cdot \frac{tg\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \;=\; \pi r^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{tg\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \;=\; \pi r^2\,.$$

essendo: $\lim_{n\to\infty} \frac{sen\, 2\pi/n}{2\pi/n} \overset{t=\frac{2\pi}{n}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{sen\,t}{t} \;=\; 1$ *e* $\lim_{n\to\infty} \frac{tg\,\pi/n}{\pi/n} \overset{t=\frac{\pi}{n}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{sen\,t}{t} \cdot \frac{1}{\cos t} \;=\; 1\,.$

Punto 4

Il problema della quadratura del cerchio consiste nel trovare, utilizzando soltanto una riga ed un compasso, un quadrato avente la stessa area di un dato cerchio.

Ma ponendo uguale ad r la misura del raggio del cerchio, la sua area è: $S = \pi r^2$.

Pertanto, dovendo essere anche l'area del quadrato uguale a πr^2, vorrebbe dire che la misura del suo lato dovrebbe essere $L = \sqrt{\pi r^2}$ cioè: $L = r\sqrt{\pi}$.

Ma costruire un quadrato avente come misura del lato un numero irrazionale ($\pi = 3{,}141593653\ldots$ è un numero irrazionale) è impossibile utilizzando soltanto una riga ed un compasso.