MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE

SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO (EUROPA)

ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria a.s. 2006/07

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri la parabola Γ d'equazione $f(x) = x^2 + 1$

1. Sia A(*a, b*) un punto di Γ . Si dimostri che, qualsiasi sia $a \in Z$, l'ordinata *b* non è mai un numero divisibile per 3
2. Sia C (*h, k*) il centro di una circonferenza tangente a Γ nel punto (1, 2). Si determini l'equazione del luogo geometrico descritto da C.
3. Si tracci il grafico della funzione $\frac{1}{f(x)}$. La funzione ha punti di flesso?
4. Sia $F(t) = \int_0^t \frac{1}{f(x)} dx$. Si calcoli il limite per *t* tendente ad infinito di *F(t)* e si interpreti il risultato geometricamente.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione *f* così definita:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{3 - x^2}{2} & \text{se } x \le 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{x} & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

1. Si disegni il grafico di *f* ;
2. si mostri che *f* soddisfa le condizioni del teorema del valor medio (o *teorema di Lagrange*) sull'intervallo $[0,\ 2]$; si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne espliciti il significato geometrico;
3. il dominio piano del II quadrante delimitato dal grafico di *f* e dagli assi coordinati è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse y, sono tutte quadrate. Si calcoli il volume di S.

QUESTIONARIO

1. Si calcolino le radici dell'equazione: $5^x \cdot 3^{1-x} = 10$
2. Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di R in R:

$$f : x \to 2^{x+1};\quad g : x \to 2^x + 1;\quad h : x \to 2^{|x|};\ k : x \to 2^{-x}$$

3. Quante cifre ha il numero 7^{60} nella rappresentazione decimale? Motiva esaurientemente la risposta
4. La formula seguente:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$$

   è dovuta a *Leonardo Eulero* (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita. Per dimostrarla può essere utile ricordare che è: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$? Si illustri il ragionamento seguito.
5. Si vuole che delle due radici reali dell'equazione: $x^2 + 2(h+1)x + m^2h^2 = 0$ una risulti doppia dell'altra. Quale relazione deve sussistere tra i parametri h e m?
6. Il coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione *f(x)* è, in ogni suo punto P, uguale al doppio dell'ascissa di P. Si determini *f(x)*, sapendo che *f(0)=4*.
7. Fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r , quello di minima area laterale ha il suo vertice distante dalla superficie sferica della quantità $r\sqrt{2}$
8. Si considerino un cubo e l'ottaedro regolare avente per vertici i centri delle sue facce. Si può calcolare il rapporto fra i volumi del cubo e dell'ottaedro? Si può calcolare il rapporto fra le aree del cubo e dell'ottaedro? In caso di risposta affermativa, effettuare il calcolo.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.