MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE

SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO
ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Sessione Ordinaria 2007
Calendario australe
SECONDA PROVA SCRITTA
Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1
Sia f la funzione definita da: $f(x) = a\log_{10} x + 1$, ove a è un parametro reale.

1. Dopo aver precisato il campo di esistenza di *f* si stabilisca per quali valori di *a* la funzione *f* è crescente.
2. Si disegnino i grafici F e G di *f* corrispondenti, rispettivamente, ai valori $a = 2$ e $a = -2$ e siano *b* e *c* le ascisse delle loro rispettive intersezioni con l'asse x. .
3. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo di base l'intervallo $[b,\ c]$ e vertice il punto d'intersezione tra F e G e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato.
4. Sia $g(x) = x^2$. Si determini il valore di *a* per cui *f* e *g* hanno la stessa tangente nel punto di ascissa 1.

PROBLEMA 2
Si consideri la funzione *f* così definita:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{4 - x^2}{3} & \text{se } x \le 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{x} & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

1. Si disegni il grafico di *f* ;
2. si dica se *f* soddisfa le condizioni del teorema del valor medio [o *teorema di Lagrange* – da Giuseppe Lagrange (Torino, 25 gennaio 1736 – Parigi, 10 aprile 1813))] sull'intervallo $[0,\ 2]$ e quali sono, se esistono, gli eventuali valori medi in tale intervallo,.
3. il dominio piano del II quadrante delimitato dal grafico di *f* e dagli assi coordinati è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse y, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di S.

QUESTIONARIO

1. Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di R in R:

$$f : x \to 3^{x+1}; \quad g : x \to 3^{x} + 1; \quad h : x \to 3^{|x|}; \quad k : x \to 3^{-x}$$

2. Quante cifre ha il numero 5^{59} nella rappresentazione decimale? Motiva esaurientemente la risposta.
3. Si consideri una sfera di volume V e superficie S. Si dimostri che il tasso di variazione di V rispetto al raggio è uguale a S.
4. Si illustrino il significato e l'ambito di utilizzo del simbolo $\binom{n}{m}$ e si risolva l'equazione:

$$2\binom{x}{2} = 3\binom{x-1}{2} \qquad \text{con } x \in N$$

5. La capacità di un serbatoio è la stessa di quella del cilindro circolare retto di volume massimo inscrivibile in una sfera di 2 metri di diametro. Quale è la capacità in litri del serbatoio?
6. Dato un tetraedro regolare, si costruisca il tetraedro regolare avente per vertici i centri delle facce del primo. Si dimostri che ogni faccia di un tetraedro è parallela ad una faccia dell'altro.
7. Si dia una definizione di "asintoto" – *orizzontale, obliquo, verticale* – di una curva e si fornisca un esempio di funzione f(x) il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.
8. La risoluzione di un problema assegnato conduce all'equazione $2 senx + k \cos x = 1$ ove k>0 e $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$. Si discutano le possibili soluzioni del problema.

Durata della prova: 6 ore.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.