ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2006

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Questionario

Quesito 1

Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64ª casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

Soluzione

Il numero N dei chicchi di grano è: $N = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} = \sum_{n=0}^{63} 2^n$.

Si tratta di una serie geometrica di ragione 2.

La somma di tale serie è: $S = \sum_{n=0}^{k} q^n = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$ *cioè:* $S = \sum_{n=0}^{63} 2^n = \frac{2^{63+1} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$.

Pertanto il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore è:

$$P = \frac{2^{64} - 1}{1000} \cdot 38 \cdot 10^{-6} \ t = \frac{2^{64} - 1}{10^9} \cdot 38 \ t = 7{,}0098 \cdot 10^{11} \ t .$$

Quesito 2

I poliedri regolari – noti anche come solidi platonici – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

Soluzione

Un poliedro si dice regolare se le sue facce sono poligoni regolari congruenti e i suoi angoloidi sono congruenti tra loro. Diversamente dagli analoghi poligoni regolari nel piano, che possono avere un infinito numero di lati, i poliedri regolari, nello spazio, sono solo cinque.
Infatti in ogni vertice del poliedro regolare devono concorrere almeno tre facce costituite da poligoni regolari e la somma degli angoli delle facce che si incontrano in tali vertici deve essere minore di 360 gradi; in caso contrario le facce si appiattirebbero in uno stesso piano.
Questo implica che non è possibile avere facce esagonali o con un numero maggiore di lati dato che questi poligoni hanno angoli interni maggiori di 120 gradi.

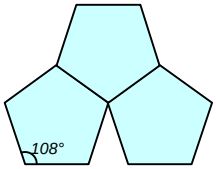
Pertanto:

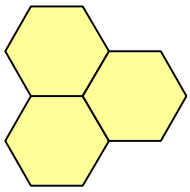
- *se le facce che concorrono in un vertice sono triangoli equilateri (angoli di 60°), si hanno tre casi:*
  - *3 facce (somma degli angoli uguale a 180°) – TETRAEDRO (4 triangoli equilateri)*
  - *4 facce (somma degli angoli uguale a 240°) – OTTAEDRO (8 triangoli equilateri)*
  - *5 facce (somma degli angoli uguale a 300°) – ICOSAEDRO (20 triangoli equilateri)*

  Non si possono costruire poliedri regolari aventi 6 facce, perché la somma degli angoli è uguale a 360°, e quindi tassellano il piano.
- *se le facce che concorrono in un vertice sono quadrati (angoli di 90°), si ha solo un caso:*
  - *3 facce (somma degli angoli uguale a 270°) – CUBO o ESAEDRO (6 quadrati)*

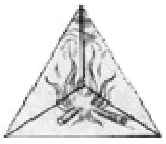
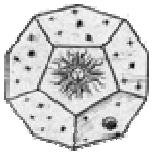
  Non si possono costruire poliedri regolari aventi 4 facce, perché la somma degli angoli è uguale a 360°, e quindi tassellano il piano.
- *se le facce che concorrono in un vertice sono pentagoni regolari (angoli di 108°) si ha solo un caso:*
  - *3 facce (somma degli angoli uguale a 324°) – DODECAEDRO (12 pentagoni regolari).*

  Non si possono costruire poliedri regolari aventi 4 facce, perché la somma degli angoli è uguale a 432°, e quindi il poliedro è irrealizzabile.
- *Non si possono costruire poliedri regolari aventi facce costituite da esagoni regolari (angoli di 120°), perché 3 esagoni regolari tassellano il piano.*





I cinque corpi regolari

				
Tetraedro *4 facce triangolari* *6 spigoli* *4 vertici*	***Cubo*** *6 facce quadrate* *12 spigoli* *8 vertici*	***Ottaedro*** *8 facce triangolari* *12 spigoli* *6 vertici*	***Icosaedro*** *20 facce triangolari* *30 spigoli* *12 vertici*	***Dodecaedro*** *12 facce pentagonali* *30 spigoli* *20 vertici*

Proclo, storico della matematica del V secolo dopo Cristo, attribuisce a Pitagora la scoperta dei 5 poliedri regolari.

Platone userà questa straordinaria scoperta come simbologia dell'universo e dei suoi elementi base: il fuoco (tetraedro), la terra (cubo), l'aria (ottaedro) e l'acqua (l'icosaedro). Il quinto poliedro regolare, il dodecaedro, era a simboleggiare la quinta essenza che tutto avvolge e comprende. La metafora ha un qualche senso matematico dato che è possibile dimostrare che l'unico poliedro regolare nel quale sia possibile inscrivere gli altri 4 è il dodecaedro. Questa tradizione neo-platonica resterà viva fino a Keplero che credette di poter descrivere i moti dei pianeti in termini di poliedri e loro reciproche inclusioni.

Quesito 3

In un piano sono dati una retta r e due punti A e B ad essa esterni ma situati nel medesimo semipiano di origine r. Si trovi il più breve cammino che congiunga A con B toccando r.

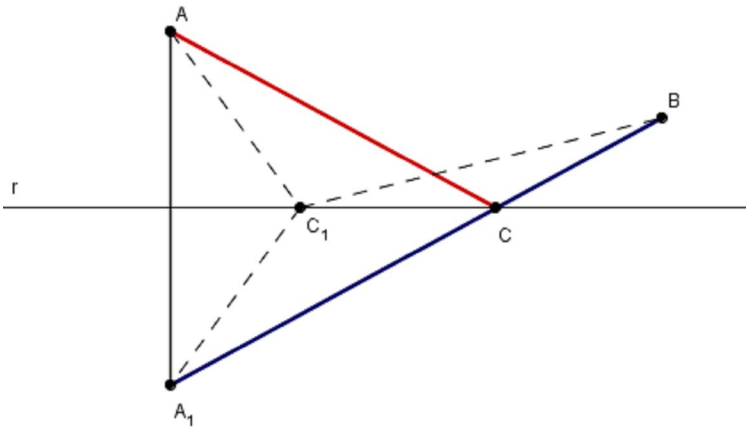
Soluzione

Costruiamo il simmetrico A^I del punto A rispetto alla retta r .

Evidentemente se si considerano i punti A^I e B, anziché A e B , il minimo cammino che li congiunge è il segmento che li ha per estremi, cioè:

$\overline{A_1B} = \overline{A_1C} + \overline{BC}$ *ma* $\overline{A_1C} = \overline{AC}$.

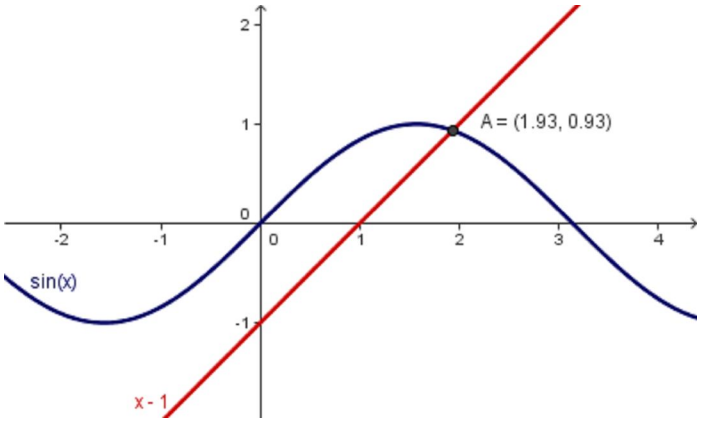
Pertanto il più breve cammino che congiunga A con B toccando r è: $\overline{AC} + \overline{BC}$.



Infatti prendendo un qualsiasi altro punto C_1 sulla retta r , per la nota disuguaglianza triangolare (in un triangolo la somma di due lati è maggiore del terzo), si ha che: $\overline{AC_1} + \overline{C_1B} = \overline{A_1C_1} + \overline{C_1B} > \overline{A_1B} = \overline{AC} + \overline{BC}$.

Quesito 4

Si dimostri che l'equazione $\text{sen}\, x = x - 1$ *ha una e una sola radice* α *e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare* α *con la precisione voluta.*



Soluzione

Risolvere l'equazione $\text{sen}\, x = x - 1$

equivale a risolvere il sistema: $\begin{cases} y = \text{sen}\, x \\ y = x - 1 \end{cases}$

Dalla rappresentazione grafica delle due curve si evince che le due curve hanno un solo punto di intersezione.

Tale soluzione, in una prima approssimazione, si trova nell'intervallo $(1,\ 2)$.

Per dimostrare che l'equazione $\text{sen}\, x = x - 1$ *ha una e una sola radice* α *, consideriamo la funzione:*

$h(x) = 1 - x + \text{sen}\, x$ *definita e continua* $\forall x \in R$.

La derivata prima è: $h'(x) = -1 + \cos x$.

$h'(x) > 0$; $-1 + \cos x > 0$; $\cos x > 1$ *mai verificata. Quindi* $h'(x) \le 0 \quad \forall x \in R$.

La funzione è quindi decrescente in tutto il suo dominio.

Essendo inoltre, $h(1) = 1 - 1 + \text{sen}\, 1 > 0$ *e* $h(2) = 1 - 2 + \text{sen}\, 2 = -1 + 0{,}9 < 0$
per il teorema dell'esistenza degli zeri tale soluzione α *esiste ed è unica.*

Utilizzando il metodo di bisezione si ha:

Metodo di bisezione

$h(x) = 1 - x + \text{sen}\, x$

Approssimazione	0,01

x_1	x_2	x_m	Segno di h(x) in x_1	Segno di h(x) in x2	Segno di h(x) in x_m	Δx	Verifica Approssimazione
1	2	1,5	1	-1	1	1	continua
1,5	2	1,75	1	-1	1	0,5	continua
1,75	2	1,875	1	-1	1	0,25	continua
1,875	2	1,938	1	-1	-1	0,125	continua
1,875	1,938	1,906	1	-1	1	0,0625	continua
1,906	1,938	1,922	1	-1	1	0,0313	continua
1,9219	1,9375	1,9297	1	-1	1	0,0156	continua
1,9297	1,9375	1,9336	1	-1	1	0,0078	STOP
1,9336	1,9375	1,93					0,0078<0,01

Quesito 5

Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ *è uguale a* 2^n *per ogni* $n \in N$.

Soluzione

Ricordando che la potenza del binomio:

$$(a+b)^n = k_0\, a^n b^0 + k_1\, a^{n-1} b + k_2\, a^{n-2} b^2 + \ldots + k_{n-1}\, a^1 b^{n-1} + k_n\, a^0 b^n$$

dove $k_0,\ k_1,\ k_2,\ \ldots,k_{n-1},\ k_n$ *sono i coefficienti delllo sviluppo di* $(a+b)^n$.

Ponendo in questa formula $a=1$ *e* $b=1$ *si ottiene:*

$$(1+1)^n = k_0 \cdot 1^n \cdot 1^0 + k_1 \cdot 1^{n-1} \cdot 1 + k_2 \cdot 1^{n-2} \cdot 1^2 + \ldots + k_{n-1} \cdot 1^1 \cdot 1^{n-1} + k_n \cdot 1^0 \cdot 1^n$$ *cioè:*

$$2^n = k_0 + k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1} + k_n$$ *c.v.d.*

Quesito 6

L'equazione risolvente un dato problema è: $k\cos 2x - 5k + 2 = 0$ *dove* k *è un parametro reale e* x *ha le seguenti limitazioni:* $15° < x < 45°$. *Si discuta per quali valori di* k *le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.*

<u>Soluzione 1</u>

La limitazione $15° < x < 45°$ *si traduce nella limitazione:* $30° < 2x < 90°$.

Ponendo $2x = t$ *e ricordando che* $k \neq 0$ *(altrimenti si ha* $2 = 0$ *e l'equazione è impossibile)*

si ha che l'equazione $k\cos 2x - 5k + 2 = 0$ *si trasforma in:* $k\cos t - 5k + 2 = 0$; $\cos t = \dfrac{5k-2}{k}$

che equivale al sistema: $\begin{cases} y = \cos t \\ y = \dfrac{5k-2}{k} \\ 30° < t < 90° \end{cases}$

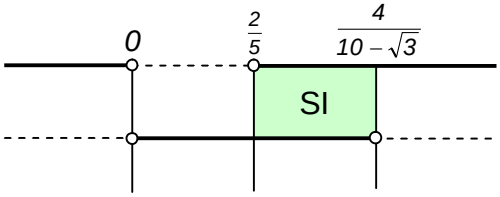
Essendo: $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *e* $\cos 90° = 0$

ed essendo il coseno una funzione decrescente nell'intervallo $(30°,\ 90°)$ *si ha che:*

$30° < t < 90° \Rightarrow \cos 90° < \cos t < \cos 30°$; $0 < \dfrac{5k-2}{k} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; *che equivale al sistema:*

$$\begin{cases} \dfrac{5k-2}{k} > 0 \\ \dfrac{5k-2}{k} < \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{5k-2}{k} > 0 \\ \dfrac{10k-4-\sqrt{3}k}{2k} < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{5k-2}{k} > 0 \\ \dfrac{(10-\sqrt{3})k-4}{2k} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k < 0;\ \ k > \dfrac{2}{5} \\ 0 < k < \dfrac{4}{10-\sqrt{3}} \end{cases}$$

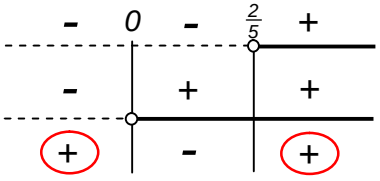


$$\frac{2}{5} < k < \frac{4}{10-\sqrt{3}}.$$

<u>Calcoli</u>

Risoluzione della disequazione:

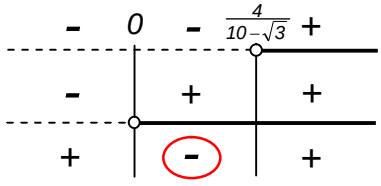
$\dfrac{5k-2}{k} > 0$; $\begin{matrix} 5k-2>0 \\ k>0 \end{matrix}$; $\begin{matrix} k > \dfrac{2}{5} \\ k > 0 \end{matrix}$



$k < 0;\ \ k > \dfrac{2}{5}$

Risoluzione della disequazione:

$\dfrac{(10-\sqrt{3})k-4}{2k} < 0$; $(10-\sqrt{3})k - 4 > 0$ $\quad 2k > 0$ $\quad \begin{matrix} k > \dfrac{4}{10-\sqrt{3}} \\ k > 0 \end{matrix}$

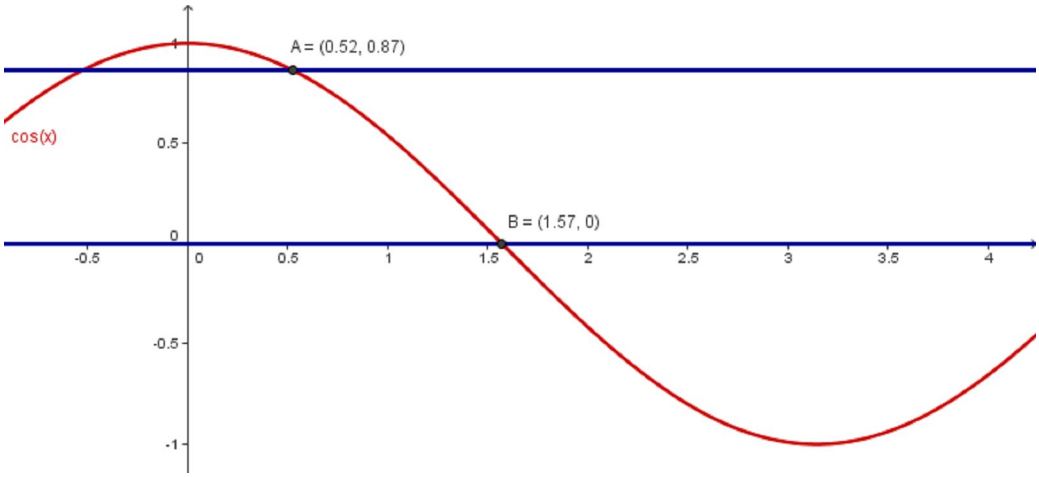


$0 < k < \dfrac{4}{10-\sqrt{3}}$

Soluzione 2

L'equazione $\cos t = \dfrac{5k-2}{k}$ *si può interpretare come l'intersezione tra le curve* $y = \cos t$ *e* $y = \dfrac{5k-2}{k}$ *(fascio di rette orizzontali) nell'intervallo* $30° < t < 90°$ *,*

cioè il sistema: $\begin{cases} y = \cos t \\ y = \dfrac{5k-2}{k} \\ 30° < t < 90° \end{cases}$



Essendo:

$\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5k-2}{k}\,; \quad \sqrt{3}k = 10k - 4\,; \quad \left(\sqrt{3}-10\right)k = -4\,; \quad k = \dfrac{4}{10-\sqrt{3}} \approx 0{,}48\,.$

$\cos 90° = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \dfrac{5k-2}{k}\,; \quad \dfrac{2}{k} = 5\,; \quad k = \dfrac{2}{5} = 0{,}4\,.$

Si deduce che:

per $k = \dfrac{4}{10-\sqrt{3}}$ *si ottiene la retta passante per il punto* A *.*

per $k = \dfrac{2}{5}$ *si ottiene la retta passante per il punto* B *.*

La retta del fascio incontra la curva $y = \cos t$ *sempre in un punto per:* $\dfrac{2}{5} < k < \dfrac{4}{10-\sqrt{3}}$ *.*

Quesito 7

Bruno de Finetti (1906-1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita, alla domanda: "che cos'è la probabilità?" era solito rispondere: "la probabilità non esiste!". Quale significato puoi attribuire a tale risposta?
E' possibile collegarla ad una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?

Soluzione

Negli anni i matematici hanno dato diverse definizioni di probabilità:

- *La definizione classica di probabilità di un evento, data dal rapporto tra i casi favorevoli all'evento e quelli possibili, è applicabile quando questo conteggio diviene possibile ma ciò non è sempre realizzabile.*
- *La definizione frequentista che considera la probabilità di un evento come la frequenza calcolata su un numero sufficientemente elevato di prove, si può applicare quando gli eventi siano ripetibili e per i quali si possa disporre di conteggi che informino su quante volte un evento si è verificato in un numero elevato di prove.*

Vi sono però eventi che non rientrano in nessuna delle precedenti due definizioni: per questo De Finetti affermava che: "la probabilità non esiste!".

Infatti ad un evento del tipo: "domani, alla finale della coppa del mondo di calcio, l'Italia batte la Francia" non è possibile assegnare con le precedenti definizioni alcun valore di probabilità.

Tale limitatezza viene superata dalla definizione soggettivista che afferma che la probabilità di un evento è la misura della fiducia che un individuo coerente attribuisce al verificarsi di tale evento. Nella interpretazione di De Finetti tale definizione diventa: "la probabilità di un evento è quel valore o prezzo p $(0 < p < 1)$ *che un individuo, che procede alla valutazione secondo le sue informazioni e opinioni, ritiene equo pagare per ricevere una vincita pari ad 1 nel caso si verifichi l'evento.*

Più semplicemente, riprendendo l'esempio precedente, un Tizio che valuta al 40% la possibilità che l'Italia vinca la partita contro il Brasile, significa che è disposto a scommettere 40€ in cambio di una vincita di 100€ qualora l'Italia vincesse.

Quesito 8

Un tiratore spara ripetutamente ad un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità $\geq 0{,}99$ di colpirlo almeno una volta?

Soluzione

Essendo $p = 0{,}3$ la probabilità di colpire il bersaglio per ciascun tiro, implica che la probabilità di non colpire il bersaglio per ciascun tiro è: $q = 1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

Quindi la probabilità che non colpisca mai il bersaglio in n tiri è: $q_n = q^n = 0{,}7^n$.

Oppure con la formula: $q_n = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \binom{n}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{n-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}7^n = 0{,}7^n$

Pertanto la probabilità che colpisca almeno una volta il bersaglio in n tiri è: $p_n = 1 - q^n = 1 - 0{,}7^n$.

Per determinare il numero dei tiri che deve fare il tiratore affinché la probabilità di colpirlo almeno una volta sia $\geq 0{,}99$, occorre risolvere la disequazione: $1 - 0{,}7^n \geq 0{,}99$.

$1 - 0{,}7^n \geq 0{,}99$; $0{,}7^n \leq 1 - 0{,}99$; $0{,}7^n \leq 0{,}01$; applicando il $\log_e x$ ad ambo i membri, si ha:

$\log_e 0{,}7^n \leq \log_e 0{,}01$; $n \cdot \log_e 0{,}7 \leq \log_e 0{,}01$; dividendo per $\log_e 0{,}7 < 0$ il segno di disuguaglianza si inverte

$$n \geq \frac{\log_e 0{,}01}{\log_e 0{,}7} \approx 12{,}9.$$

In definitiva il tiratore deve fare 13 tiri affinché la probabilità di colpirlo almeno una volta sia $\geq 0{,}99$.

Quesito 9

Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x)=f(x)$ e $f(0)=1$. Puoi determinare $f(x)$?

Soluzione

Il quesito non è ben formulato, perché non è stato specificato chiaramente il dominio della funzione.

Comunque, leggendo nel pensiero di chi ha formulato la domanda, si può procedere nel seguente modo:

Essendo la funzione $f(x)$ derivabile in ogni punto del suo dominio, essa è anche continua in ogni punto del suo dominio. Essendo inoltre sempre diversa da zero, con $f(0)=1>0$, essa è sempre positiva in ogni punto del suo dominio.

Il problema sintetizzato nella forma: $\begin{cases} f'(x)=f(x) \\ f(0)=1 \end{cases}$ *rappresenta il classico problema di Cauchy.*

Essendo $f(x)\neq 0$, l'equazione differenziale $f'(x)=f(x)$, può essere riscritta nella forma: $\frac{f'(x)}{f(x)}=1$.

Integrando ambo i membri in dx si ricava: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int dx$ *cioè* $\log|f(x)|=x+k$.

Essendo $f(x)>0$ in ogni punto del suo dominio, l'ultima uguaglianza diventa: $\log f(x)=x+k$

Dalla definizione di logaritmo si ottiene: $f(x)=e^{x+k}$ *che si può riscrivere come:* $f(x)=e^k\cdot e^x$ ***(*)***

Applicando la condizione iniziale: $f(0)=1$ *si ricava:* $f(0)=e^{0+k}$; $1=e^k$

Sostituendo tale risultato nella soluzione generale si ottiene: $f(x)=1\cdot e^x$ *cioè* $f(x)=e^x$.

Quesito 10

Tenuto conto che: $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ *calcola un'approssimazione di* π *utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.*

Soluzione

Dalla relazione della traccia si ricava: $\pi = 4 \cdot \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

Per determinare un'approssimazione dell'integrale $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ *si può utilizzare la formula dei trapezi o di Bezout:*

$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n} \cdot \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + ... + f(x_{n-1}) \right]$ *dividendo l'intervallo* $[0,1]$ *in 5 intervalli di ampiezza* $0,2$ *.*

Calcoliamo innanzitutto i valori:

$f(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$; $\quad f(0,2) = \frac{1}{1+\left(\frac{2}{10}\right)^2} = \frac{25}{26}$; $\quad f(0,4) = \frac{1}{1+\left(\frac{4}{10}\right)^2} = \frac{25}{29}$;

$f(0,6) = \frac{1}{1+\left(\frac{6}{10}\right)^2} = \frac{25}{34}$; $\quad f(0,8) = \frac{1}{1+\left(\frac{8}{10}\right)^2} = \frac{25}{41}$; $\quad f(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[\frac{1+\frac{1}{2}}{2} + \frac{25}{26} + \frac{25}{29} + \frac{25}{34} + \frac{25}{41} \right] = \frac{1}{5} \cdot \left[\frac{3}{4} + \frac{25}{26} + \frac{25}{29} + \frac{25}{34} + \frac{25}{41} \right] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[\frac{788307 + 1010650 + 906100 + 772850 + 640900}{1051076} \right] = \frac{1}{5} \cdot \frac{4118807}{1051076} \approx 0,7837315$$

Pertanto $\pi = 4 \cdot 0,7837315 \approx 3,1349261$

Tale valore differisce per meno di un centesimo dal valore di π.
Infatti: $\pi - 3,1349261 = 3,1415927 - 3,1349261 = 0,0066665 < 0,001$.