ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2006

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Problema 1

Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

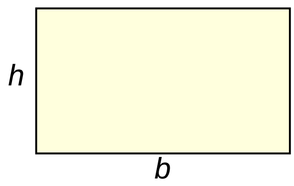
Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

Punto a



Se il filo ha lunghezza λ, allora il semiperimetro misura $\frac{\lambda}{2}$.

Se si pone la base $b = x$ allora l'altezza vale $h = \frac{\lambda}{2} - x$.

Pertanto l'area dell'aiuola è: $S(x) = x \cdot \left(\frac{\lambda}{2} - x \right)$ con $0 \le x \le \frac{\lambda}{2}$.

Riscritta nella forma: $S(x) = -x^2 + \frac{\lambda}{2} x$ rappresenta un arco di parabola, con la concavità rivolta verso il basso.

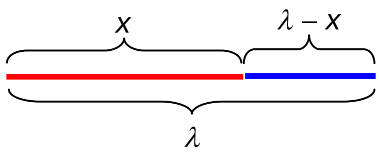
Essa assume il valore massimo nel vertice: $x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{\lambda}{4}$.

Pertanto la base $b = x = \frac{\lambda}{4}$ e l'altezza $h = \frac{\lambda}{2} - x = \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4}$.

Si può concludere quindi che l'aiuola di area massima ha la forma di un quadrato.

La sua area vale: $S(x) = \left(\frac{\lambda}{4} \right)^2 = \frac{\lambda^2}{16}$.

Punto b



Ponendo la parte del filo che delimita l'aiuola circolare uguale ad x.

Il raggio dell'aiuola circolare misura: $r = \frac{C}{2\pi} = \frac{x}{2\pi}$

La parte di filo che delimita l'aiuola quadrata è: $\lambda - x$. Il lato dell'aiuola quadrata misura: $l = \frac{\lambda - x}{4}$.

Le due aree sono pertanto: $S_C = \pi \cdot \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2$ e $S_Q = \left(\frac{\lambda - x}{4} \right)^2$

Mentre la somma delle due aree è:

$$S = \pi \cdot \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 + \left(\frac{\lambda - x}{4} \right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{\lambda^2 + x^2 - 2\lambda x}{16} = \frac{4x^2 + \pi\lambda^2 + \pi x^2 - 2\lambda\pi x}{16\pi} = \frac{1}{16\pi} \cdot \left[(4 + \pi) x^2 - 2\lambda\pi x + \pi\lambda^2 \right].$$

L'espressione $\begin{cases} S(x) = \dfrac{1}{16\pi} \cdot \left[(4+\pi)x^2 - 2\lambda\pi x + \pi\lambda^2\right] \\ 0 \le x \le \lambda \end{cases}$ rappresenta un arco di parabola con concavità positiva.

Essa assume il valore minimo nel vertice: $x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2\lambda\pi}{2\cdot(4+\pi)} = \dfrac{\lambda\pi}{4+\pi}$

Punto c

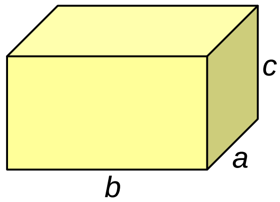
Essendo: $S(x)$ priva di altri punti estremanti, essa assume il massimo in uno dei due estremi dell'intervallo $(0, \lambda)$

Essendo: $S(\lambda) = \dfrac{1}{16\pi}\cdot\left[(4+\pi)\lambda^2 - 2\pi\lambda^2 + \pi\lambda^2\right] = \dfrac{\lambda^2}{16\pi}\cdot\left[4+\pi-2\pi+\pi\right] = \dfrac{4\lambda^2}{16\pi} = \dfrac{\lambda^2}{4\pi}$;

$S(0) = \dfrac{1}{16\pi}\cdot\pi\lambda^2 = \dfrac{\lambda^2}{16}$; $S(0) = \dfrac{\lambda^2}{16} < \dfrac{\lambda^2}{4\pi} = S(\lambda)$ $\Rightarrow$ il massimo è assunto quando $x = \lambda$,

cioè quando il filo è utilizzato tutto per l'aiuola circolare.

Punto d



Il volume iniziale del parallelepipedo è: $V = abc$.

Aumentando del 10% ciascuna sua dimensione si ottiene un volume:

$$V' = \left(a + \frac{1}{10}a\right)\cdot\left(b + \frac{1}{10}b\right)\cdot\left(c + \frac{1}{10}c\right) = \frac{11}{10}a\cdot\frac{11}{10}b\cdot\frac{11}{10}c = \frac{1331}{1000}abc.$$

Con un aumento di volume $\Delta V = V' - V = \dfrac{1331}{1000}abc - abc = \dfrac{331}{1000}abc = 0{,}331\,abc$.

Quindi l'aumento percentuale di terreno è: $\dfrac{\Delta V}{V}\cdot 100 = \dfrac{0{,}331abc}{abc}\cdot 100 = 33{,}1\%$.