

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

*Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.***PROBLEMA 1**Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali x , y :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$$

dove a è un parametro reale positivo.

- Esprimere y in funzione di x e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
- Determinare per quali valori di a la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta t di equazione $x + y = 4$.
- Scrivere l'equazione della circonferenza k che ha il centro nel punto di coordinate $(1; 1)$ e intercetta sulla retta t una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.
- Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla retta t .
- Determinare per quale valore del parametro a il grafico, di cui al precedente punto a), risulta tangente alla circonferenza k .

PROBLEMA 2

Considerato un qualunque triangolo ABC, siano D ed E due punti interni al lato BC tali che:

$$\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$$

Siano poi M ed N i punti medi rispettivamente dei segmenti AD ed AE.

- Dimostrare che il quadrilatero DENM è la quarta parte del triangolo ABC.
- Amnesso che l'area del quadrilatero DENM sia $\frac{45}{2}a^2$, dove a è una lunghezza assegnata, e amnesso che l'angolo \widehat{ABC} sia acuto e si abbia inoltre: $\overline{AB} = 13a$, $\overline{BC} = 15a$, verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo.
- Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto b), ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti M, N, C.
- Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo ADC.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Indicata con $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, si sa che $f(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow a$, essendo l ed a numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che $f(a) = l$ e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che $f(0) = 2$. Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{2x e^x} \quad \text{dove } e \text{ è la base dei logaritmi naturali.}$$

3. Si consideri il cubo di spigoli AA^i , BB^i , CC^i , DD^i , in cui due facce opposte sono i quadrati $ABCD$ e $A^iB^iC^iD^i$. Sia E il punto medio dello spigolo AB . I piani ACC^iA^i e D^iDE dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.

4. Un tronco di piramide ha basi di aree B e b ed altezza h . Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume V è espresso dalla seguente formula: $V = \frac{1}{3} h \cdot (B + b + \sqrt{B \cdot b})$.

In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.

5. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo $[a, b]$ e tale che, per ogni x di tale intervallo, risulti $f'(x) = 0$. Dimostrare che $f(x)$ è costante in quell'intervallo.

6. Dimostrare che si ha:
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dove n, k sono numeri naturali qualsiasi, con $n > k > 0$.

7. Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:

- area massima e perimetro massimo
- area massima e perimetro minimo
- area minima e perimetro massimo
- area minima e perimetro minimo

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

8. Considerata la funzione: $f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x$

dove a è un parametro reale non nullo, determinare i valori di a per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

9. Il limite della funzione $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen } x - \cos x}{x}$:

- è uguale a 0;
- è uguale ad 1;
- è un valore diverso dai due precedenti;
- non è determinato.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

10. Si consideri la funzione $\frac{x + \text{sen } x}{x - \cos x}$. Stabilire se si può calcolarne il limite per $x \rightarrow \infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hôpital.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.