

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

PROBLEMA 1

Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua su tutto l'asse reale, tale che:

$$[1] \quad \int_0^1 f(x) dx = 2 \quad \text{e} \quad \int_0^2 f(x) dx = -5$$

a. Di ciascuno dei seguenti integrali:

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx, \quad \int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx, \quad \int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right) dx, \quad \int_0^1 f(x) dx$$

dire se le condizioni [1] sono sufficienti per calcolarne il valore e in caso di risposta affermativa qual è questo.

b. Posto: $f(x) = ax^3 + bx + c$,

dove a, b, c sono parametri reali con $a \neq 0$, determinare le curve di equazione $y = f(x)$ che soddisfano alle condizioni [1].

c. Dimostrare che ognuna delle curve trovate ha uno ed un solo punto di flesso che è centro di simmetria per la curva medesima.

d. Determinare quella, tra tali curve, che ha il flesso nel punto di ordinata -4 .

e. Fra le curve suddette determinare, infine, quelle che hanno punti estremanti e quelle che non ne hanno.

PROBLEMA 2

Il rettangolo ABCD è tale che la retta che congiunge i punti medi dei suoi lati più lunghi, AB e CD, lo divide in due rettangoli simili a quello dato. Tali lati hanno lunghezza assegnata a .

a. Determinare la lunghezza dei lati minori del rettangolo.

b. Sulla retta condotta perpendicolarmente al piano del rettangolo nel punto medio del lato AD prendere un punto V in modo che il piano dei punti V, B, C formi col piano del rettangolo dato un angolo di coseno $\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Calcolare il volume della piramide di vertice V e base ABCD.

c. Condotta il piano α parallelo al piano della faccia VAD della piramide, ad una distanza x da questo, in modo però che α sechi la piramide stessa, esprimere in funzione di x l'area del poligono sezione.

d. Calcolare infine i volumi delle due parti in cui il piano α divide la piramide nel caso in cui $x = \frac{a}{2}$.

PROBLEMA 3

Il candidato dimostri i seguenti enunciati:

a. Fra tutti i triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa, quello isoscele ha l'area massima.

b. Fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una data sfera, quello di minima area laterale ha il suo vertice distante dalla superficie sferica della quantità $r\sqrt{2}$, se r è il raggio della sfera.

Il candidato chiarisca, infine, il significato di $n!$ (**fattoriale di n**) e il suo legame con i coefficienti binomiali.

Durata massima della prova: 5 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.