Una **successione** di numeri Reali è una funzione $\mathbf{f : N \longrightarrow R}$ che associa ad ogni numero naturale un numero Reale.

Esempio : $f : N \longrightarrow R$

$n \longrightarrow f(n) = \frac{1}{n}$ al posto di scrivere $f(n) = \frac{1}{n}$ si usa scrivere $a_n = \frac{1}{n}$

Definizioni

L'insieme dei valori che assume a_n si chiama **sostegno** o immagine della successione .

Una successione a_n è **limitata** se il suo sostegno S è limitato, cioè se: $\exists k > 0$ $t.\ c.$ $|a_n| \le k \ \ \forall n \in N$.

Una successione a_n è **limitata superiormente** se il suo sostegno S è limitato superiormente , cioè se: $\exists k > 0$ t. c. $a_n \le k \ \ \forall n \in N$.

Una successione a_n è **limitata inferiormente** se il suo sostegno S è limitato inferiormente cioè se: $\exists k > 0$ t. c. $k \le a_n \ \ \forall n \in N$.

Se la successione a_n non è **limitata superiormente**, si scrive $\sup a_n = +\infty$

Se la successione a_n non è **limitata inferiormente** , si scrive $\sup a_n = -\infty$

Successioni Monotone

Le seguenti successioni sono monotone:

(a_n è una successione crescente) $\Leftrightarrow$ $\left(a_n \le a_{n+1} \quad \forall n \in N\right)$

(a_n è una successione strettamente crescente) $\Leftrightarrow$ $\left(a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in N\right)$

(a_n è una successione decrescente) $\Leftrightarrow$ $\left(a_n \ge a_{n+1} \quad \forall n \in N\right)$

(a_n è una successione strettamente decrescente) $\Leftrightarrow$ $\left(a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in N\right)$

Definizioni di limite

$$\begin{pmatrix}\text{Una successione } a_n \\ \text{si dice convergente}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} a_n = L \ne \pm\infty\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists v \ \ t.c. \ \forall n > v \\ si\ ha\ che \ \ |a_n - L| < \varepsilon\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Una successione } a_n \text{ si dice} \\ \text{divergente positivamente}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\forall k > 0 \ \ \exists v \ \ t.c. \ \forall n > v \\ si\ ha\ che \ \ a_n > k\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Una successione } a_n \text{ si dice} \\ \text{divergente negativamente}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\forall k > 0 \ \ \exists v \ \ t.c. \ \forall n > v \\ si\ ha\ che \ \ a_n < -k\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Una successione } a_n \\ \text{si dice divergente}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\forall k > 0 \ \ \exists v \ \ t.c. \ \forall n > v \\ si\ ha\ che \ \ |a_n| > k\end{pmatrix}$$

Definizioni

$$\left(\text{Una successione } a_n \text{ si dice infinitesima}\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} a_n = 0\right)$$

$$\left(\text{Una successione } a_n \text{ si dice regolare}\right) \Leftrightarrow \left(\text{Esiste } \lim_{n\to+\infty} a_n = 0\right)$$

Teoremi

$\left(Se\ \ a_n\ è\ una\ successione\ convergente\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\ a_n\ \ è\ \ limitata\right)$

$\begin{pmatrix} Se\ \ a_n\ è\ una\ successione \\ divergente\ \ positivamente \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\ a_n\ \ non\ è\ limitata\ superiormente\right)$

$\begin{pmatrix} Se\ \ a_n\ è\ una\ successione \\ divergente\ negativamente \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\ a_n\ \ non\ è\ limitata\ inferiormente\right)$

Definizioni

Date due successioni a_n e b_n :

Si chiama successione **somma** la successione $a_n + b_n$ così definita: $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3$, ...

Si chiama successione **prodotto** la successione $a_n \cdot b_n$ così definita: $a_1 \bullet b_1$, $a_2 \bullet b_2$, $a_3 \bullet b_3$, ...

Si chiama successione **quoziente** la successione $\dfrac{a_n}{b_n}$ così definita : $\dfrac{a_1}{b_1}$, $\dfrac{a_2}{b_2}$, $\dfrac{a_3}{b_3}$, . . . (con $b_n \neq 0$) .

Teoremi

$\left(Se\ \ esiste\ \ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\ L\ \ è\ \ unico\right)$

$$\begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \pm b_n = a \pm b \\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b} \end{pmatrix}$$

tenendo presente che:

Somma e prodotto

$\mathbf{n} + \infty = + \infty$	$\mathbf{n} - \infty = - \infty$	$+ \infty + \infty = + \infty$	$- \infty\ - \infty = - \infty$	$\mathbf{n} \bullet \infty = \infty$	$\infty \bullet \infty = \infty$

Quoziente

$\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$	$\dfrac{\mathbf{0}}{\infty} = \mathbf{0}$	$\dfrac{\mathbf{n}}{\infty} = \mathbf{0}$	$\dfrac{\mathbf{n}}{\mathbf{0}} = \infty$	$\dfrac{\infty}{\mathbf{0}} = \infty$	$\dfrac{\infty}{\mathbf{n}} = \infty$

Forme indeterminate

$+ \infty - \infty = ?$	$- \infty + \infty = ?$	$\mathbf{0} \bullet \infty = ?$	$\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} = ?$	$\dfrac{\infty}{\infty} = ?$	$\mathbf{0}^{\mathbf{0}} = ?$	$\infty^{\mathbf{0}} = ?$	$\mathbf{1}^{\infty} = ?$

TEOREMA DEL CONFRONTO O DEI DUE CARABINIERI

$$\begin{pmatrix} \text{Siano } a_n, b_n, c_n \text{ tre successioni tali che} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = L \in R \\ \exists v \;\; t.c. \;\; \forall n > v \quad a_n \le b_n \le c_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{Esiste } \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

Dimostrazione

$-\frac{1}{n} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \frac{1}{n}$ ed essendo le funzioni $-\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{n}$ infinitesime, per il Teorema dei due Carabinieri, la funzione al centro è infinitesima.

Corollario del Teorema del Confronto

$$\begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \\ b_n \text{ è limitata} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = 0 \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+5)}{3n^2+1} \right)$$

Dimostrazione

Infatti si tratta del limite del prodotto della successione limitata $-1 \le (-1)^n \le 1$ per la successione infinitesima $a_n = \frac{(n+5)}{3n^2+1} \to 0$, per il Corollario del Confronto, la funzione traccia è infinitesima.

Teorema

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \right)$$

TEOREMA DEL CONFRONTO 2

$$\begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \\ \exists v \;\; t.c. \;\; \forall n > v \quad a_n \le b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{Esiste } \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\lim_{n\to\infty}\left[n+(-1)^n\right]=+\infty$$

Dimostrazione

$n-1 \le n+(-1)^n$ ed essendo la prima funzione divergente positivamente, per il Teorema del confronto 2, la funzione a destra diverge positivamente.

TEOREMA DEL CONFRONTO 3

$$\begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty \\ \exists v \;\; t.c. \;\; \forall n > v \;\; a_n \le b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\text{Esiste } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \right)$$

Esempio

$$\lim_{n\to\infty}[\text{sen } n - n] = -\infty$$

Dimostrazione

Essendo $sen\ n \le 1$ si ha che: $sen\ n - n \le 1-n$ ed essendo la seconda funzione divergente negativamente, per il Teorema del confronto 3, la funzione a sinistra diverge negativamente.

LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ 0 & \text{se } -1<a<1 \\ \text{non esiste} & \text{se } a\le -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>0 \\ 1 & \text{se } \alpha=0 \\ 0 & \text{se } \alpha<0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a^{a_n} = \begin{cases} 0 & \text{se } a_n \to -\infty \\ 1 & \text{se } a_n \to 0 \\ +\infty & \text{se } a_n \to +\infty \end{cases} \quad (a>1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} a^{a_n} = \begin{cases} +\infty & se\ a_n \to -\infty \\ 1 & se\ a_n \to 0 \\ 0 & se\ a_n \to +\infty \end{cases} \quad (0<a<1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \log_a a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n \to +\infty \\ -\infty & \text{se } a_n \to 0 \end{cases} \quad (a>1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \log_a a_n = \begin{cases} -\infty & se\ a_n \to +\infty \\ +\infty & se\ a_n \to 0 \end{cases} \quad (0<a<1)$$

ORDINE DEGLI INFINITI

$$\log\ n < n^\alpha < a^n < n! < n^n \quad (a>1 \;\; \alpha>0)$$

cioè, $(\text{se } a>1 \text{ e } \alpha>0)$ valgono i seguenti limiti :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{n^\alpha}=0 \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{a^n}=0 \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0 \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

da ricordare inoltre :

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=0 \qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1 \qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{n^\alpha}=+\infty \quad (\alpha<0)$$

TEOREMI SULLE SUCCESSIONI MONOTONE

Teoremi

$$\left(Se\ \ a_n\ \ è\ \ una\ \ successione\ \ monotòna\right) \quad\Rightarrow\quad \left(a_n\ \ è\ \ una\ \ successione\ \ regolare\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} Se\ \ a_n\ \ è\ \ una\ \ successione\ \ crescente\ \ o \\ strettamente\ \ crescente\ \ e\ \ limitata \end{array}\right) \quad\Rightarrow\quad \left(\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup a_n\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} Se\ \ a_n\ \ è\ \ una\ \ successione\ \ decrescente\ \ o \\ strettamente\ \ decrescente\ \ e\ \ limitata \end{array}\right) \quad\Rightarrow\quad \left(\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf a_n\right)$$

Altri limiti

$$\lim_{n\to+\infty} sen\, a_n = \begin{cases} non\ \ esiste & se\ \ a_n \to \infty \\ 0 & se\ \ a_n \to 0 \end{cases} \qquad \lim_{n\to+\infty} \cos a_n = \begin{cases} non\ \ esiste & se\ \ a_n \to \infty \\ 1 & se\ \ a_n \to 0 \end{cases}$$

Definizione

Sia a_n una successione di numeri Reali.
Una successione estratta dalla successione a_n è una successione a_{n_k}, dove n_k è una successione strettamente crescente di numeri naturali. $n_k : N \to N$

$$k \to n_k\,.$$

Esempio

Sia a_n una successione di numeri Reali. Le successioni che seguono, sono due successioni estratte dalla successione a_n:

a_{n_k} : $a_1 , a_3 , a_5 , a_7 , a_9 , \ . \ . \ . \ , a_{2k+1}$

a_{m_k} : $a_2 , a_4 , a_6 , a_8 , a_{10} , \ . \ . \ . \ , a_{2k}$

Teorema

$$\left(Se\ \ esiste\ \ \lim_{n\to+\infty} a_n = L \neq \pm\infty\right) \quad\Rightarrow\quad \left(\begin{array}{l} Ogni\ \ successione\ \ estratta \\ da\ \ a_n\ \ ha\ \ limite\ \ L \end{array}\right)$$

Corollario (del teorema precedente)

$$\left(\begin{array}{l} Siano\ \ a_{n_k}\ \ e\ \ a_{m_k}\ \ due\ \ successioni\ \ estratte\ \ da\ \ a_n \\ se\ \ \lim_{n\to+\infty} a_{n_k}\ \ \neq\ \ \lim_{n\to+\infty} a_{m_k} \end{array}\right) \quad\Rightarrow\quad \left(Non\ \ esiste\ \ \lim_{n\to+\infty} a_n\right)$$