Successioni

Successioni numeriche

Una **successione numerica** è una funzione $f: N \to R$ che associa ad ogni numero naturale n un numero reale a_n. In simboli: $\begin{aligned} f:\ & N \to R \\ & n \to f(n) = a_n \end{aligned}$.

Una successione è un insieme ordinato e infinito di numeri, detti **termini** della successione: $a_1, a_2, a_3, \dots\ a_n$.

Esempio

La successione di termine generale $a_n = n^3$ è una funzione che associa ad ogni numero naturale il suo cubo.

$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 8, \quad a_3 = 27, \ \dots$

Rappresentazione di una successione

Una successione può essere rappresentata in diversi modi:

La rappresentazione per **elencazione** consiste nell'elencare i primi termini della successione.

Esempio

$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 8, \quad a_3 = 27, \ \dots$

Rappresentazione mediante espressione analitica

La rappresentazione mediante **espressione analitica** consiste nello scrivere esplicitamente la relazione che intercorre tra l'indice n e il termine n-esimo a_n della successione.

Esempio

$a_n = n^3$.

Rappresentazione ricorsiva

La rappresentazione **ricorsiva** consiste nell'indicare il primo termine a_0 della successione e la relazione che lega il termine generale a_n al suo precedente a_{n-1}.

Esempio

$$\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_n = a_{n-1} + 10 \qquad se\ n > 0 \end{cases}$$

Nota

Talvolta la rappresentazione **ricorsiva** consiste nell'indicare i primi k termini della successione e la relazione che lega il termine generale a_n ai suoi k termini precedenti.

Successione di Fibonacci

$$\begin{cases} a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad se\ n > 1 \end{cases}$$

$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 3, \quad a_5 = 5, \quad a_6 = 8, \ \dots$

Successioni monotòne

Una successione è **crescente** se ogni termine è maggiore del suo precedente, cioè $a_n > a_{n-1}, \ \forall n \in N$.
Una successione è **decrescente** se ogni termine è minore del suo precedente, cioè $a_n < a_{n-1}, \ \forall n \in N$.
Una successione è **non decrescente** se $a_n \geq a_{n-1}, \ \forall n \in N$.
Una successione è **non crescente** se $a_n \leq a_{n-1}, \ \forall n \in N$.
Una successione è **costante** se ogni termine è uguale al suo precedente se $a_n = a_{n-1}, \ \forall n \in N$.

Principio di induzione

Il principio di induzione è un metodo di dimostrazione cosi definito:

Data una proposizione $p(n)$ il cui enunciato dipende da n , con $n \in N \ e \ n \geq 1$:

1. se $p(n)$ è vera per $n = 1$
2. se supponendo $p(n)$ vera per n , si dimostra che $p(n)$ è vera per $n + 1$

allora la proposizione è vera per ogni $n \geq 1$.

Principio di induzione (formulazione generale)

Data una proposizione $p(n)$ il cui enunciato dipende da n , con $n \in N \ e \ n \geq k$:

1. se $p(n)$ è vera per $n = k$
2. se supponendo $p(n)$ vera per n , si dimostra che $p(n)$ è vera per $n + 1$

allora la proposizione è vera per ogni $n \geq 1$.

Progressioni

Progressioni aritmetiche

Una **progressione aritmetica** è una successione numerica tale che la differenza tra ogni termine e il suo precedente è costante. Tale differenza costante è detta **ragione**, e si indica con **d**.

In una progressione aritmetica di ragione **d**, ogni termine è uguale al suo precedente aumentato della ragione.

$$\boxed{\boldsymbol{a_n = a_{n-1} + d}}$$

Una progressione aritmetica di ragione d è : $\begin{cases} \textbf{crescente} & \text{se } d > 0 \\ \textbf{decrescente} & \text{se } d < 0 \\ \textbf{costante} & \text{se } d = 0 \end{cases}$

Esempio

La successione: $10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30, \ldots$ è una progressione aritmetica crescente di ragione 5.

Termine generale

Il termine generale di una progressione aritmetica è : $\boxed{\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}}$

<u>*Dimostrazione*</u>

In una progressione aritmetica la differenza tra ogni termine e quello predente è uguale a **d***:*

$$\begin{array}{ll}
\cancel{a_2} - a_1 = d & + \\
\cancel{a_3} - \cancel{a_2} = d & \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \\
\cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}} = d & \\
a_n - \cancel{a_{n-1}} = d & = \quad \textit{Sommando membro a membro le n-1 uguaglianze, si ha:} \\
\hline
a_n - a_1 = (n-1)d & \Rightarrow \quad a_n = a_1 + (n-1)d
\end{array}$$

Esempio

Dati: $a_7 = 72$ e $d = 3$, calcola a_1 .

<u>*Soluzione*</u>

$a_n = a_1 + (n-1)d\,;$ $\quad a_7 = a_1 + (7-1) \cdot 3\,;$ $\quad 72 = a_1 + 6 \cdot 3\,;$ $\quad a_1 = 72 - 18\,;$ $\quad a_3 = 54$.

Relazione fra due termini di una progressione aritmetica

La relazione fra due termini di una progressione aritmetica è : $\boxed{\boldsymbol{a_r = a_s + (r-s) \cdot d}}$

<u>*Dimostrazione*</u>

Applicando la formula del termine generale di una progressione aritmetica all'elemento $\boldsymbol{r}$ *e all'elemento* $\boldsymbol{s}$ *si ha:*

$$\begin{array}{ll}
a_r = a_1 + (r-1)d & - \\
a_s = a_1 + (s-1)d & = \quad \textit{Sottraendo membro a membro le due uguaglianze, si ha:} \\
\hline
a_r - a_s = (r-1)d - (s-1)d & \quad a_r - a_s = rd - sd \qquad a_r = a_s + (r-s)d
\end{array}$$

Esempio

Dati: $a_7 = 39$ e $d = 7$, calcola a_3 .

<u>*Soluzione*</u>

$a_r = a_s + (r-s)d\,;$ $\quad a_7 = a_3 + (7-3) \cdot 7\,;$ $\quad 39 = a_3 + 4 \cdot 7\,;$ $\quad a_3 = 39 - 28\,;$ $\quad a_3 = 11$.

Inserimento di termini in una progressione aritmetica

Per inserire un numero qualsiasi di termini in una progressione aritmetica occorre:

1. determinare la ragione **d**
2. aggiungere ad ogni termine, a partire dal primo, la ragione.

Esempio

Determinare i termini intermedi di una progressione aritmetica di primo termine 10 e settimo termine 70 .

Soluzione

Determiniamo dapprima, la ragione della progressione aritmetica:

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{70-10}{7-1} = 10 \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = 10\,; \quad a_2 = 10+10 = 20\,; \quad a_3 = 20+10 = 30\,; \;.\;\;.\;\;.$$

Teorema :

In una progressione aritmetica la somma di due termini equidistanti dagli estremi è costante ed uguale alla somma dei termini estremi.

3 10 17 24 31 38 45 52

55

55

55

Dimostrazione

Indichiamo con x ed y due termini equidistanti dagli estremi e con k il numero dei termini che precedono x e seguono y. Si ottiene:

$$\begin{array}{ll} x = a_1 + k \cdot d & + \\ y = a_n - k \cdot d & = \\ \hline x + y = a_1 + k \cdot d + a_n - k \cdot d & \end{array}$$

Sommando membro a membro le due uguaglianze, si ha: $x + y = a_1 + a_n$

La somma di termini consecutivi di una progressione aritmetica

La somma dei primi n termini della progressione aritmetica è : $\boxed{\boldsymbol{S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}}}$

Dimostrazione

Scriviamo la somma dei primi n termini della progressione aritmetica prima in ordine crescente e poi in ordine decrescente:

$$\begin{array}{lll} S_n & = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n & + \\ S_n & = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 & = \\ \hline \end{array}$$

Sommando membro a membro le due uguaglianze, si ha:

$$2 \cdot S_n \;=\; (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Per il teorema precedente $(a_1 + a_n) = (a_2 + a_{n-1}) = \cdots = (a_{n-1} + a_2) = (a_n + a_1) \qquad \Rightarrow$

$$2 \cdot S_n = n \cdot (a_1 + a_n) \qquad \Rightarrow \qquad S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Esempio

Determinare la somma dei primi 12 termini della progressione aritmetica avente come primo termine 1 e ragione 2.

Soluzione

Determiniamo dapprima, il termine $a_{12} = a_1 + (n-1) \cdot d = 1 + (12-1) \cdot 2 = 1 + 22 = 23$

In seguito si può determinare la somma: $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \qquad \Rightarrow \qquad S_{12} = 12 \cdot \frac{1+23}{2} = 6 \cdot 24 = 144$.

Progressioni geometriche

Una **progressione geometrica** è una successione numerica tale che il quoziente tra ogni termine e il suo precedente è costante. Tale rapporto costante è detto **ragione**, e si indica con **q**.

In una progressione geometrica di ragione **q** ($q \neq 0$), ogni termine è uguale al suo precedente moltiplicato per la ragione.

$$\boxed{\boldsymbol{a_n = q \cdot a_{n-1}}}$$

In una progressione geometrica :

- se $q > 0$ i termini sono tutti o positivi o tutti negativi
- se $q < 0$ i termini sono di segno alternato

Una progressione geometrica di ragione q è :

$$\begin{cases} \textbf{crescente} & \begin{cases} se\ \ q > 1\ \ e\ i\ termini\ sono\ positivi \\ \qquad oppure \\ se\ \ 0 < q < 1\ \ e\ i\ termini\ sono\ negativi \end{cases} \\ \textbf{decrescente} & \begin{cases} se\ \ 0 < q < 1\ \ e\ i\ termini\ sono\ positivi \\ \qquad oppure \\ se\ \ q > 1\ \ e\ i\ termini\ sono\ negativi \end{cases} \\ \textbf{costante} & se\ q = 1 \end{cases}$$

Esempi

Progressione	Tipo
$2\ ,6\ ,18\ ,54\ ,162\ ...$	*Progressione crescente di ragione* $q = 3$
$-8\ ,-4\ ,-2\ ,-1\ ,-\frac{1}{2},\ ...$	*Progressione crescente di ragione* $q = \frac{1}{2}$
$8\ ,4\ ,2\ ,1\ ,\frac{1}{2},\ ...$	*Progressione decrescente di ragione* $q = \frac{1}{2}$
$-2\ ,-6\ ,-18\ ,-54\ ,-162\ ...$	*Progressione decrescente di ragione* $q = 3$
$7\ ,7\ ,7\ ,7\ ,7,\ ...$	*Progressione costante di ragione* $q = 1$
$+1\ ,-2\ ,+4\ ,-8\ ,+16,\ ...$	*Progressione con segno alternato di ragione* $q = -2$

Termine generale

Il termine generale di una progressione geometrica è : $\boxed{\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}}$ con $n \geq 1$

<u>*Dimostrazione*</u>

In una progressione geometrica ogni termine è uguale al prodotto del precedente per la ragione ***q*** *:*

$a_2 = a_1 \cdot q$ X

$a_3 = a_2 \cdot q$

. . .

$a_{n-1} = a_{n-2} \cdot q$

$a_n = a_{n-1} \cdot q$ = *Moltiplicando membro a membro le* $n-1$ *uguaglianze, si ha:*

$$\cancel{a_2} \cdot \cancel{a_3} \cdot\ .\ .\ .\ .\ \cdot \cancel{a_{n-1}} \cdot a_n = a_1 \cdot \cancel{a_2} \cdot \cancel{\ }\ .\ .\ .\ \cdot \cancel{a_{n-2}} \cdot \cancel{a_{n-1}} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot\ .\ .\ .\ .\ \cdot q}_{n-1}$$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Esempio

Dati: $a_5 = -8$ e $a_1 = -\frac{1}{2}$, calcola q .

<u>*Soluzione*</u>

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$; $\qquad a_5 = a_1 \cdot q^{5-1}$; $\qquad -8 = -\frac{1}{2} \cdot q^4$; $\qquad q^4 = 16$; $\qquad q = \mp\sqrt[4]{16} = \mp 2$.

$q = +2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}, -1, -2, -4, -8 \ \ldots \qquad\qquad q = -2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}, +1, -2, +4, -8 \ \ldots$

Relazione fra due termini di una progressione geometrica

La relazione fra due termini di una progressione geometrica è : $\boxed{\boldsymbol{a_r = a_s \cdot q^{r-s}}}$

<u>*Dimostrazione*</u>

Applicando la formula del termine generale di una progressione geometrica all'elemento $\boldsymbol{r}$ *e all'elemento* $\boldsymbol{s}$ *si ha:*

$a_r = a_1 \cdot q^{r-1} \qquad :$

$a_s = a_1 \cdot q^{s-1} \qquad =$ *Dividendo membro a membro le due uguaglianze, si ha:*

$$\frac{a_r}{a_s} = \frac{a_1 \cdot q^{r-1}}{a_1 \cdot q^{s-1}} \qquad \frac{a_r}{a_s} = \frac{q^{r-1}}{q^{s-1}}\,; \qquad \frac{a_r}{a_s} = \frac{q^r}{q^s}; \qquad a_r = a_s \cdot q^{r-s}$$

Esempio
Dati: $a_6 = 13$ e $q = 3$, calcola a_2 .

<u>*Soluzione*</u>

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}\,; \qquad a_6 = a_2 \cdot 3^{6-2}\,; \qquad 13 = a_2 \cdot 3^4\,; \qquad a_2 = \frac{13}{81} \ .$$

Inserimento di termini in una progressione geometrica

Per inserire un numero qualsiasi di termini in una progressione geometrica occorre:

1. determinare la ragione **q**
2. moltiplicare ogni termine, a partire dal primo, per la ragione.

Esempio
Determinare i termini intermedi di una progressione geometrica avente come primo termine 10 e come quinto termine 160 .

<u>*Soluzione*</u>

Determiniamo dapprima, la ragione della progressione geometrica:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}\,; \qquad a_5 = a_1 \cdot q^{5-1}\,; \qquad 160 = 10 \cdot q^4\,; \qquad q^4 = 16\,; \qquad q = 2\,.$$

In seguito si possono determinare i termini intermedi:

$$a_2 = 10 \cdot 2 = 20\,; \qquad a_3 = 20 \cdot 2 = 4 = 40\,; \qquad a_4 = 40 \cdot 2 = 80\,.$$

Teorema :
In una progressione geometrica il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi è costante ed uguale al prodotto dei termini estremi.

2 4 8 16 32 64 128 256

512

512

512

<u>*Dimostrazione*</u>

Indichiamo con x ed y due termini equidistanti dagli estremi e con k il numero dei termini che precedono x e seguono y. Si ottiene:

$x = a_1 \cdot q^k \qquad \mathsf{X}$

$y = \dfrac{a_n}{q^k} \qquad =$ *Moltiplicando membro a membro le due uguaglianze, si ha:*

$$x \cdot y = a_1 \cdot q^k \cdot \frac{a_n}{q^k} \qquad x \cdot y = a_1 \cdot a_n$$

Il prodotto di termini consecutivi di una progressione geometrica

Il prodotto dei primi n termini della progressione geometrica è : $\boxed{\boldsymbol{P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}}}$

Dimostrazione

Scriviamo il prodotto dei primi n termini della progressione geometrica prima in ordine crescente e poi in ordine decrescente:

$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$ X

$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$ = *Moltiplicando membro a membro le due uguaglianze, si ha:*

$P_n{}^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1)$

Per il teorema precedente $(a_1 \cdot a_n) = (a_2 \cdot a_{n-1}) = \cdots = (a_{n-1} \cdot a_2) = (a_n \cdot a_1)$ $\Rightarrow$

$P_n{}^2 = (a_1 \cdot a_n)^n \quad \Rightarrow \quad P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

Esempio

Determinare il prodotto dei primi 4 termini della progressione geometrica avente come primo termine 5 e ragione 2.

Soluzione

Determiniamo dapprima, il termine $a_4 = a_1 \cdot q^{4-1} = 5 \cdot 2^3 = 40$

In seguito si può determinare il prodotto: $P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} \quad \Rightarrow \quad P_n = \sqrt{(5 \cdot 40)^4} = \sqrt{200^4} = 200^2 = 40000$.

La somma di termini consecutivi di una progressione geometrica

La somma dei primi n termini della progressione geometrica di ragione $q \neq 1$ è : $\boxed{\boldsymbol{S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}}$

Dimostrazione

La somma dei primi n termini della progressione geometrica:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ *Poiché* $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $\Rightarrow$

$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1}$ – *Moltiplicando entrambi i membri per q* $\Rightarrow$

$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \cdots + a_1 \cdot q^n$ = *Sottraendo membro a membro le due uguaglianze, si ha:*

$S_n \cdot q - S_n = \cancel{a_1 \cdot q} + \cancel{a_1 \cdot q^2} + \cancel{a_1 \cdot q^3} + \cdots + a_1 \cdot q^n - a_1 - \cancel{a_1 \cdot q} - \cancel{a_1 \cdot q^2} - \cdots - \cancel{a_1 \cdot q^{n-1}}$

$(q-1) \cdot S_n = a_1 \cdot q^n - a_1$ Dividendo per $q - 1 \neq 0$ si ha:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} .$$

Esempio

Determinare la somma dei primi 6 termini della progressione geometrica avente come primo termine 5 e ragione 2.

Soluzione

Determiniamo dapprima, il termine $a_6 = 5 \cdot 2^{6-1} = 5 \cdot 2^5 = 160$

In seguito si può determinare la somma: $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1} \quad \Rightarrow \quad S_6 = 5 \cdot \frac{2^6-1}{2-1} = 5 \cdot 63 = 315$.