Principio di induzione

Il principio di induzione è un metodo di dimostrazione cosi definito:

Data una proposizione $p(n)$ il cui enunciato dipende da n , con $n \in N \;\; e \;\; n \geq 1$:

1. se $p(n)$ è vera per $n = 1$
2. se supponendo $p(n)$ vera per n , si dimostra che $p(n)$ è vera per $n + 1$

allora la proposizione è vera per ogni $n \geq 1$.

Principio di induzione (formulazione generale)

Data una proposizione $p(n)$ il cui enunciato dipende da n , con $n \in N \;\; e \;\; n \geq k$:

1. se $p(n)$ è vera per $n = k$
2. se supponendo $p(n)$ vera per n , si dimostra che $p(n)$ è vera per $n + 1$

allora la proposizione è vera per ogni $n \geq 1$.

Esempio 157.82

Utilizzando il principio di induzione dimostra che, $\forall n \in N - \{0\}$:

$$\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \; . \; . \; . + n^2} \;=\; \sum_{i=1}^{n} i^2 \;=\; \mathbf{\frac{1}{6} n \cdot (n+1)(2n+1)}$$

Dimostrazione

Per $n = 1$ la proposizione è vera. Infatti si ha:

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 \;=\; \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1) \; ; \qquad 1^2 \;=\; \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \; ; \qquad 1 = 1 \, .$$

Supponiamo adesso che la proposizione sia vera per n e dimostriamo che la proposizione è vera per $n + 1$.

Per $n + 1$ la proposizione diventa:

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \; . \; . + n^2} \;+\; (n+1)^2 \;=\; \tfrac{1}{6}(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1] \; ;$$

$$\frac{1}{6} n \cdot (n+1)(2n+1) \;+\; (n+1)^2 \;=\; \frac{1}{6}(n+1)(n+2)[2n+2+1] \; ;$$

$$(n+1) \cdot \left[\frac{1}{6} n \cdot (2n+1) \;+\; (n+1)\right] \;=\; \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \; ;$$

$$(n+1) \cdot \left[\frac{n \cdot (2n+1) + 6 \cdot (n+1)}{6}\right] \;=\; \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \; ;$$

$$(n+1) \cdot \frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6} \;=\; \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 3n + 4n + 6) \, ;$$

$$(n+1) \cdot \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \;=\; \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) \, ;$$

$$\frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) \;=\; \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) \, ;$$

La proposizione è quindi vera per $n + 1$. Pertanto, per il principio di induzione, è vera per ogni $n \geq 1$.

Esempio 157.83

Utilizzando il principio di induzione dimostra che, $\forall n \in N - \{0\}$:

$$\mathbf{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3} \;=\; \sum_{i=1}^{n} i^3 \;=\; \mathbf{\frac{1}{4} n^2 \cdot (n+1)^2}$$

Dimostrazione

Per $\mathrm{n} = 1$ la proposizione è vera. Infatti si ha:

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot (1+1)^2 ; \qquad 1^3 = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 2^2 ; \qquad 1 = 1 .$$

Supponiamo adesso che la proposizione sia vera per n e dimostriamo che la proposizione è vera per $n+1$.

Per $n+1$ la proposizione diventa:

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3} + (n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot [(n+1)+1]^2 ;$$

$$\frac{1}{4} n^2 \cdot (n+1)^2 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot (n+2)^2 ;$$

$$(n+1)^2 \cdot \left[\frac{1}{4} n^2 + (n+1)\right] = \frac{1}{4}(n+1)^2 (n^2 + 4n + 4) ;$$

$$(n+1)^2 \cdot \left[\frac{n^2 + 4(n+1)}{4}\right] = \frac{1}{4}(n+1)^2 (n^2 + 4n + 4) ;$$

$$\frac{1}{4}(n+1)^2 (n^2 + 4n + 4) = \frac{1}{4}(n+1)^2 (n^2 + 4n + 4) ;$$

La proposizione è quindi vera per $n+1$. Pertanto, per il principio di induzione, è vera per ogni $n \geq 1$.

Esempio 157.84

Utilizzando il principio di induzione dimostra che, $\forall n \in N - \{0\}$:

$$\mathbf{2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + \ldots + (2n)^3} \;=\; \sum_{i=1}^{n} (2i)^3 \;=\; \mathbf{2n^2 \cdot (n+1)^2}$$

Dimostrazione

Per $\mathrm{n} = 1$ la proposizione è vera. Infatti si ha:

$$\sum_{i=1}^{1} (2 \cdot i)^3 = 2 \cdot 1^2 \cdot (1+1)^2 ; \qquad (2 \cdot 1)^3 = 2 \cdot 1 \cdot 2^2 ; \qquad 8 = 8 .$$

Supponiamo adesso che la proposizione sia vera per n e dimostriamo che la proposizione è vera per $n+1$.

Per $n+1$ la proposizione diventa:

$$\underbrace{2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + \ldots + (2n)^3} + [2(n+1)]^3 = 2(n+1)^2 \cdot [(n+1)+1]^2 ;$$

$$2n^2 \cdot (n+1)^2 + 8(n+1)^3 = 2(n+1)^2 \cdot (n+2)^2 ;$$

$$2(n+1)^2 \cdot [n^2 + 4(n+1)] = 2(n+1)^2 \cdot (n+2)^2 ;$$

$$2(n+1)^2 \cdot [n^2 + 4n + 4] = 2(n+1)^2 \cdot (n+2)^2 ;$$

$$2(n+1)^2 \cdot (n+2)^2 = 2(n+1)^2 \cdot (n+2)^2 .$$

La proposizione è quindi vera per $n+1$. Pertanto, per il principio di induzione, è vera per ogni $n \geq 1$.

Esempio 157.85

Utilizzando il principio di induzione dimostra che, $\forall n \in N - \{0\}$:

$$\mathbf{5 + 10 + 15 + \ldots + 5n} \;=\; \sum_{i=1}^{n} 5i \;=\; \mathbf{\frac{5}{2} n \cdot (n+1)}$$

Dimostrazione

Per n $= 1$ la proposizione è vera. Infatti si ha:

$$\sum_{i=1}^{1} 5 \cdot i \;=\; \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)\,; \qquad\qquad 5 \cdot 1 \;=\; \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot 2\,; \qquad\qquad 5 = 5\,.$$

Supponiamo adesso che la proposizione sia vera per n e dimostriamo che la proposizione è vera per $n+1$.

Per $n+1$ la proposizione diventa:

$$\underbrace{5 + 10 + 15 + \ldots + 5n} \quad + \quad 5(n+1) \;=\; \tfrac{5}{2}(n+1) \cdot [(n+1)+1]\;;$$

$$\frac{5}{2} n \cdot (n+1) \quad + \quad 5(n+1) \;=\; \frac{5}{2}(n+1) \cdot (n+2)\;;$$

$$(n+1) \cdot \left[\frac{5}{2} n + 5\right] \;=\; \frac{5}{2}(n+1) \cdot (n+2)\;;$$

$$(n+1) \cdot \frac{5n+10}{2} \;=\; \frac{5}{2}(n+1) \cdot (n+2)\;;$$

$$(n+1) \cdot \frac{5(n+2)}{2} \;=\; \frac{5}{2}(n+1) \cdot (n+2)\;;$$

$$\frac{5}{2}(n+1) \cdot (n+2) \;=\; \frac{5}{2}(n+1) \cdot (n+2)\;;$$

La proposizione è quindi vera per $n+1$. Pertanto, per il principio di induzione, è vera per ogni $n \geq 1$.

Esempio 157.86

Utilizzando il principio di induzione dimostra che, $\forall n \in N - \{0\}$:

$$\mathbf{3 + 6 + 9 + \ldots + 3n} \;=\; \sum_{i=1}^{n} 3i \;=\; \mathbf{\frac{3}{2} n \cdot (n+1)}$$

Dimostrazione

Per $n = 1$ la proposizione è vera. Infatti si ha:

$$\sum_{i=1}^{1} 3 \cdot i \;=\; \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)\,; \qquad\qquad 3 \cdot 1 \;=\; \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 2\,; \qquad\qquad 3 = 3\,.$$

Supponiamo adesso che la proposizione sia vera per n e dimostriamo che la proposizione è vera per $n+1$.

Per $n+1$ la proposizione diventa:

$$\underbrace{5 + 10 + 15 + \ldots + 3n} \quad + \quad 3(n+1) \;=\; \tfrac{3}{2}(n+1) \cdot [(n+1)+1]\;;$$

$$\frac{3}{2} n \cdot (n+1) \quad + \quad 3(n+1) \;=\; \frac{3}{2}(n+1) \cdot (n+2)\;;$$

$$(n+1) \cdot \left[\frac{3}{2} n + 5\right] \;=\; \frac{3}{2}(n+1) \cdot (n+2)\;;$$

$$(n+1) \cdot \frac{3n+10}{2} \;=\; \frac{3}{2}(n+1) \cdot (n+2)\;;$$

$$(n+1) \cdot \frac{3(n+2)}{2} \;=\; \frac{3}{2}(n+1) \cdot (n+2)\;;$$

$$\frac{3}{2}(n+1) \cdot (n+2) \;=\; \frac{3}{2}(n+1) \cdot (n+2)\;;$$

La proposizione è quindi vera per $n+1$. Pertanto, per il principio di induzione, è vera per ogni $n \geq 1$.

Esempio 157.87

Utilizzando il principio di induzione dimostra che, $\forall n \in N - \{0\}$:

$$\mathbf{1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \ . \ . \ . + n \cdot (2n+1)} \ = \ \sum_{i=1}^{n} \mathbf{i \cdot (2i+1)} \ = \ \mathbf{\frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (4n+5)}$$

Dimostrazione

Per $n = 1$ la proposizione è vera. Infatti si ha:

$$\sum_{i=1}^{1} i \cdot (2i+1) = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (4n+5) ; \qquad 1 \cdot (2 \cdot 1 + 1) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (4 \cdot 1 + 5) ; \qquad 3 = 3 .$$

Supponiamo adesso che la proposizione sia vera per n e dimostriamo che la proposizione è vera per $n+1$.

Per $n+1$ la proposizione diventa:

$$\underbrace{1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \ . \ . \ . + n \cdot (2n+1)} \ + \ (n+1)[2(n+1)+1] \ = \ \frac{1}{6}(n+1) \cdot (n+2) \cdot [4(n+1)+5] \ ;$$

$$\frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (4n+5) \ + \ (n+1)(2n+3) \ = \ \frac{1}{6}(n+1) \cdot (n+2) \cdot (4n+9) \ ;$$

$$(n+1) \cdot \left[\frac{1}{6} n(4n+5) + (2n+3)\right] \ = \ \frac{1}{6}(n+1) \cdot (n+2) \cdot (4n+9) \ ;$$

$$(n+1) \cdot \left[\frac{n(4n+5) + 6(2n+3)}{6}\right] \ = \ \frac{1}{6}(n+1) \cdot (4n^2 + 5n + 12n + 18) \ ;$$

$$\frac{1}{6}(n+1) \cdot [4n^2 + 5n + 12n + 18] \ = \ \frac{1}{6}(n+1) \cdot (4n^2 + 17n + 18) \ ;$$

$$\frac{1}{6}(n+1) \cdot [4n^2 + 17n + 18] \ = \ \frac{1}{6}(n+1) \cdot (4n^2 + 17n + 18) \ ;$$

La proposizione è quindi vera per $n+1$. Pertanto, per il principio di induzione, è vera per ogni $n \geq 1$.

Esempio 159.115

Utilizzando il principio di induzione dimostra che, $\forall n \in N - \{0\}$:

$\boldsymbol{n^3 + 3n^2 + 5n}$ è divisibile per 3.

Dimostrazione 1

Per $n = 1$ la proposizione è vera. Infatti si ha: $1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 9$. 9 è divisibile per 3.
Supponiamo quindi che la proposizione sia vera per n , cioè che $n^3 + 3n^2 + 5n = 3 \cdot k$ con $k \in N$,

e dimostriamo che la proposizione è vera per $n + 1$.

Per $n + 1$ la proposizione diventa:

$$(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 5(n+1) =$$

$$= n^3 + 1 + 3n^2 + 3n + 3n^2 + 3 + 6n + 5n + 5 =$$

$$= \underbrace{n^3 + 3n^2 + 5n}_{3k} + 3n^2 + 6n + 3n + 9 =$$

$$= 3k + 3n^2 + 9n + 9 =$$

$$= 3 \cdot (k + n^2 + 3n + 3) .$$

L'espressione $(k + n^2 + 3n + 3)$ è un numero naturale. Quindi, ponendo $k + n^2 + 3n + 3 = h$ si ha :

$= 3 \cdot (k + n^2 + 3n + 3) = 3 \cdot h$. Il che vuol dire che è un multiplo di 3.

La proposizione è quindi vera per $n + 1$. Pertanto, per il principio di induzione, è vera $\forall n \in N$.

Dimostrazione 2

Per $n = 1$ la proposizione è vera. Infatti si ha: $1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 9$. 9 è divisibile per 3.
Supponiamo quindi che la proposizione sia vera per n ,

cioè che $n^3 + 3n^2 + 5n = 3 \cdot k$ ossia $n^3 = 3 \cdot k - 3n^2 - 5n$ con $k \in N$,

e dimostriamo che la proposizione è vera per $n + 1$.

Per $n + 1$ la proposizione diventa:

$$(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 5(n+1) =$$

$$= n^3 + 1 + 3n^2 + 3n + 3n^2 + 3 + 6n + 5n + 5 =$$

$$= n^3 + 6n^2 + 14n + 9 =$$

$$= 3 \cdot k - 3n^2 - 5n + 6n^2 + 14n + 9 =$$

$$= 3 \cdot k + 3n^2 + 9n + 9 =$$

$$= 3 \cdot (k + n^2 + 3n + 3) .$$

L'espressione $(k + n^2 + 3n + 3)$ è un numero naturale. Quindi, ponendo $k + n^2 + 3n + 3 = h$ si ha :

$3 \cdot (k + n^2 + 3n + 3) = 3 \cdot h$. Il che vuol dire che è un multiplo di 3.

La proposizione è quindi vera per $n + 1$. Pertanto, per il principio di induzione, è vera $\forall n \in N$.

Esempio 159.116

Utilizzando il principio di induzione dimostra che, $\forall n \in N$:

$\mathbf{3^{2n+1} + 2^{n+2}}$ è multiplo di 7.

Dimostrazione 1

Per $n = 1$ la proposizione è vera. Infatti si ha: $3^{2\cdot 1+1} + 2^{1+2} = 3^3 + 2^3 = 27 + 8 = 35$. 35 è un multiplo di 7.
Supponiamo quindi che la proposizione sia vera per n , cioè che $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7 \cdot k$ con $k \in N$,

e dimostriamo che la proposizione è vera per $n + 1$.

Per $n + 1$ la proposizione diventa:

$$
\begin{aligned}
& 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} && = \\
= \; & 3^{2n+3} + 2^{n+3} && = \\
= \; & 3^{2n+1} \cdot 3^2 + 2^{n+2} \cdot 2^1 && = \\
= \; & 9 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2} && = \\
= \; & 7 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2} && = \\
= \; & 7 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot (3^{2n+1} + 2^{n+2}) && = \\
= \; & 7 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 7k && = \\
= \; & 7 \cdot (3^{2n+1} + 2\,k) && =
\end{aligned}
$$

L'espressione $(3^{2n+1} + 2\,k)$ è un numero naturale. Quindi, ponendo $3^{2n+1} + 2\,k = h$ si ha :

$7 \cdot (3^{2n+1} + 2\,k) = 7 \cdot h$. Il che vuol dire che è un multiplo di 7.

La proposizione è quindi vera per $n + 1$. Pertanto, per il principio di induzione, è vera $\forall n \in N$.

Dimostrazione 2

Per $n = 1$ la proposizione è vera. Infatti si ha: $3^{2\cdot 1+1} + 2^{1+2} = 3^3 + 2^3 = 27 + 8 = 35$. 35 è un multiplo di 7.
Supponiamo quindi che la proposizione sia vera per n ,

cioè che $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7 \cdot k$ ossia $3^{2n+1} = 7 \cdot k - 2^{n+2}$ con $k \in N$,

e dimostriamo che la proposizione è vera per $n + 1$.

Per $n + 1$ la proposizione diventa:

$$
\begin{aligned}
& 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} && = \\
= \; & 3^{2n+3} + 2^{n+3} && = \\
= \; & 3^{2n+1} \cdot 3^2 + 2^{n+2} \cdot 2^1 && = \\
= \; & 9 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2} && = \\
= \; & 9 \cdot (7 \cdot k - 2^{n+2}) + 2 \cdot 2^{n+2} && = \\
= \; & 63\,k - 9 \cdot 2^{n+2} + 2 \cdot 2^{n+2} && = \\
= \; & 63\,k - 7 \cdot 2^{n+2} && = \\
= \; & 7\,(9k - 2^{n+2}) \; .
\end{aligned}
$$

L'espressione $(9k - 2^{n+2})$ è un numero intero. Quindi, ponendo $9k - 2^{n+2} = h$ si ha :

$7 \cdot (9k - 2^{n+2}) = 7 \cdot h$. Il che vuol dire che è un multiplo di 7.

La proposizione è quindi vera per $n + 1$. Pertanto, per il principio di induzione, è vera $\forall n \in N$.

Esempio 159.117

Utilizzando il principio di induzione dimostra che, $\forall n \in N - \{0\}$:

$\mathbf{4^{n+1} + 5^{2n-}}$ è divisibile per 21.

Dimostrazione 1

Per $n = 1$ la proposizione è vera. Infatti si ha: $4^{1+1} + 5^{2\cdot 1-1} = 16 + 5 = 21$. 21 è divisibile per 21.
Supponiamo quindi che la proposizione sia vera per n , cioè che $4^{n+1} + 5^{2n-1} = 21\,k$ con $k \in N$,

e dimostriamo che la proposizione è vera per $n + 1$.

Per $n + 1$ la proposizione diventa:

$4^{(n+1)+1} + 5^{2(n+1)-1} =$

$= 4^{n+2} + 5^{2n+1} =$

$= 4 \cdot 4^{n+1} + 5^2 \cdot 5^{2n-1} =$

$= 4 \cdot 4^{n+1} + 25 \cdot 5^{2n-1} =$

$= 4 \cdot 4^{n+1} + 4 \cdot 5^{2n-1} + 21 \cdot 5^{2n-1} =$

$= 4 \cdot (4^{n+1} + 5^{2n-1}) + 21 \cdot 5^{2n-1} =$

$= 4 \cdot (4^{n+1} + 5^{2n-1}) + 21 \cdot 5^{2n-1} =$

$= 4 \cdot 21\,k + 21 \cdot 5^{2n-1} =$

$= 21 \cdot (4\,k + 5^{2n-1})$.

L'espressione $(4\,k + 5^{2n-1})$ è un numero naturale. Quindi, ponendo $4\,k + 5^{2n-1} = h$ si ha :

$= 21 \cdot (4\,k + 5^{2n-1}) = 21 \cdot h$. Il che vuol dire che è un multiplo di 21.

La proposizione è quindi vera per $n + 1$. Pertanto, per il principio di induzione, è vera $\forall n \in N$.

Dimostrazione 2

Per $n = 1$ la proposizione è vera. Infatti si ha: $4^{1+1} + 5^{2\cdot 1-1} = 16 + 5 = 21$. 21 è divisibile per 21.
Supponiamo quindi che la proposizione sia vera per n ,

cioè che $4^{n+1} + 5^{2n-1} = 21\,k$ ossia $4^{n+1} = 21\,k - 5^{2n-1}$ con $k \in N$,

e dimostriamo che la proposizione è vera per $n + 1$.

Per $n + 1$ la proposizione diventa:

$4^{(n+1)+1} + 5^{2(n+1)-1} =$

$= 4 \cdot 4^{n+1} + 5^2 \cdot 5^{2n-1} =$

$= 4 \cdot 4^{n+1} + 25 \cdot 5^{2n-1} =$

$= 4 \cdot (21\,k - 5^{2n-1}) + 25 \cdot 5^{2n-1} =$

$= 4 \cdot 21k - 4 \cdot 5^{2n-1} + 25 \cdot 5^{2n-1} =$

$= 4 \cdot 21k + 21 \cdot 5^{2n-1} =$

$= 21 \cdot (4k + 5^{2n-1})$.

L'espressione $(4\,k + 5^{2n-1})$ è un numero naturale. Quindi, ponendo $4\,k + 5^{2n-1} = h$ si ha :

$= 21 \cdot (4\,k + 5^{2n-1}) = 21 \cdot h$. Il che vuol dire che è un multiplo di 21.

La proposizione è quindi vera per $n + 1$. Pertanto, per il principio di induzione, è vera $\forall n \in N$.

Esempio 159.118

Utilizzando il principio di induzione dimostra che, $\forall n \in N - \{0\}$ $\quad \mathbf{2n \leq 2^n}$.

<u>*Dimostrazione*</u>

Per $n = 1$ la proposizione è vera. Infatti si ha: $2 \cdot 1 \leq 2^1$; $\quad 2 \leq 2$.
Supponiamo quindi che la proposizione sia vera per n , cioè che: $2n \leq 2^n$,

e dimostriamo che la proposizione è vera per $n+1$, cioè che: $2(n+1) \leq 2^{n+1}$ ossia $2n + 2 \leq 2 \cdot 2^n$

$$\begin{array}{rcll} 2n & \leq & 2^n & + \\ 2 & \leq & 2^n & = \\ \hline 2n+2 & \leq & 2^n + 2^n & \end{array} \qquad 2n + 2 \leq 2 \cdot 2^n$$

La proposizione è quindi vera per $n+1$. Pertanto, per il principio di induzione, è vera $\forall n \in N$.

Esempio 159.119

Utilizzando il principio di induzione dimostra che, $\forall n \in N \ \wedge \ n > 2$ $\quad \mathbf{n^2 > 2n + 1}$.

<u>*Dimostrazione*</u>

Per $n = 3$ la proposizione è vera. Infatti si ha: $3^2 > 2 \cdot 3 + 1$; $\quad 9 > 7$.
Supponiamo quindi che la proposizione sia vera per n , cioè che: $n^2 > 2n + 1$,

e dimostriamo che la proposizione è vera per $n+1$, cioè che: $(n+1)^2 > 2(n+1) + 1$

ossia $n^2 + 2n + 1 > 2n + 2 + 1$.

$$\begin{array}{rcll} n^2 & > & 2n+1 & + \\ 2n+1 & > & 2 & = \\ \hline n^2 + 2n + 1 & > & 2n + 2 + 1 & \end{array}$$

La proposizione è quindi vera per $n+1$. Pertanto, per il principio di induzione, è vera $\forall n \in N$.

Esempio 159.120 Disuguaglianza di Bernoulli

Utilizzando il principio di induzione dimostra che, $\forall n \in N \quad \wedge \quad \forall x \in R \quad \wedge \quad x > -1$:
$\mathbf{(1 + x)^n \geq 1 + nx}$.

<u>*Dimostrazione*</u>

Per $n = 0$ la proposizione è vera. Infatti si ha: $(1 + x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x$; $\quad 1 \geq 1$.
Supponiamo quindi che la proposizione sia vera per n , cioè che: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$,

e dimostriamo che la proposizione è vera per $n+1$, cioè che: $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$;

ossia $(1 + x) \cdot (1 + x)^n \geq 1 + nx + x$.

Partiamo questa volta dall'ipotesi supposta vera: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

e moltiplichiamo ambo i membri per $(1 + x) > 0$ *(Infatti. essendo $x > -1 \iff 1 + x > 0$)*

$(1 + x) \cdot (1 + x)^n \geq (1 + x) \cdot (1 + nx)$;

$(1 + x) \cdot (1 + x)^n \geq 1 + nx + x + nx^2$.

Essendo $nx^2 \geq 0 \quad \forall n \in N \qquad \Rightarrow \qquad (1 + x) \cdot (1 + x)^n \geq 1 + nx + x$.

La proposizione è quindi vera per $n+1$. Pertanto, per il principio di induzione, è vera $\forall n \in N$.