

Progressioni geometriche

FORMULARIO

Una **progressione geometrica** è una successione numerica tale che il quoziente tra ogni termine e il suo precedente è costante. Tale rapporto costante è detto **ragione**, e si indica con **q**.

In una progressione geometrica di ragione **q** ($q \neq 0$), ogni termine è uguale al suo precedente moltiplicato per la ragione.

$$a_n = q \cdot a_{n-1}$$

In una progressione geometrica :

-  se $q > 0$ i termini sono tutti o positivi o tutti negativi
-  se $q < 0$ i termini sono di segno alternato

Una progressione geometrica di ragione q è :

crescente	{	se $q > 1$ e i termini sono positivi
		oppure
	se $0 < q < 1$ e i termini sono negativi	
decrescente	{	se $0 < q < 1$ e i termini sono positivi
		oppure
	se $q > 1$ e i termini sono negativi	
costante		se $q = 1$

Il termine generale di una progressione geometrica è : $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ con $n \geq 1$

La relazione fra due termini di una progressione geometrica è : $a_r = a_s \cdot q^{r-s}$

Il prodotto dei primi n termini della progressione geometrica è : $P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

La somma dei primi n termini della progressione geometrica di ragione $q \neq 1$ è :

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

ESERCIZI

Esempio 1

Calcola la ragione di una progressione geometrica di 5 termini i cui estremi sono, nell'ordine, $-\frac{1}{2}$ e -8 .

Soluzione

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}; \quad a_5 = a_1 \cdot q^{5-1}; \quad -8 = -\frac{1}{2} \cdot q^4; \quad q^4 = 16; \quad q = \pm\sqrt[4]{16} = \pm\sqrt[4]{2^4} = \pm 2.$$

Esempio 2

Calcola il numero n dei termini di una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{3}$, primo termine $\frac{3}{4}$ ed n -esimo termine $\frac{1}{36}$.

Soluzione

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}; \quad \frac{1}{36} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}; \quad \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{36} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}; \quad \frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}; \quad \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1};$$
$$n - 1 = 3; \quad n = 4.$$

Esempio 3

Calcola il primo termine di una progressione geometrica di ragione 2 e quarto termine -192 .

Soluzione

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}; \quad a_4 = a_1 \cdot q^{4-1}; \quad -192 = a_1 \cdot 2^3; \quad a_1 = -\frac{192}{8} = -24.$$

Esempio 4

Calcola il quinto termine di una progressione geometrica di ragione $-\frac{1}{4}$ e primo termine -6 .

Soluzione

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}; \quad a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} = -6 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^4 = -6 \cdot \frac{1}{256} = -\frac{3}{128}.$$

Esempio 5

Calcola il settimo termine di una progressione geometrica di ragione $\sqrt{2}$ e quarto termine $8\sqrt{2}$.

Soluzione

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}; \quad a_7 = a_4 \cdot q^{7-4} = 8\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^3 = 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}^3 = 8\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 32.$$

Esempio 6

Calcola il quarto termine di una progressione geometrica di ragione 3 e settimo termine 39 .

Soluzione

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}; \quad a_7 = a_4 \cdot q^{7-4}; \quad 39 = a_4 \cdot 3^3; \quad a_4 = \frac{39}{27} = \frac{13}{9}.$$

Esempio 7

Inserisci fra i termini 2 e $8\sqrt{2}$ quattro numeri in modo da formare una progressione geometrica.

Soluzione

Determiniamo la ragione:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}; \quad a_6 = a_1 \cdot q^{6-1}; \quad 8\sqrt{2} = 2 \cdot q^5; \quad q^5 = 4\sqrt{2}; \quad q^5 = \sqrt{4^2 \cdot 2};$$

$$q^5 = (\sqrt{2})^5; \quad q = \sqrt{2}.$$

I termini della progressione geometrica sono: $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8, 8\sqrt{2}$.

Esempio 8

Calcola il prodotto dei primi cinque termini di una progressione geometrica il cui primo termine è $\frac{1}{2}$ e il quinto è 18 .

Soluzione

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}; \quad P_5 = \sqrt{(a_1 \cdot a_5)^5} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot 18\right)^5} = \sqrt{(3^2)^5} = \sqrt{3^{10}} = 3^5 = 243.$$

Esempio 9

Calcola il prodotto dei primi sei termini di una progressione geometrica di ragione $\sqrt{2}$ e primo termine 2 .

Soluzione

Calcoliamo il sesto termine:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}; \quad a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} = 2 \cdot (\sqrt{2})^5 = 2 \cdot \sqrt{2^5} = 2 \cdot \sqrt{2^4 \cdot 2} = 8\sqrt{2}.$$

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}; \quad P_6 = \sqrt{(a_1 \cdot a_6)^6} = \sqrt{(2 \cdot 8\sqrt{2})^6} = \sqrt{16^6 \cdot (\sqrt{2})^6} = \sqrt{(2^4)^6 \cdot 2^3} =$$

$$= \sqrt{2^{27}} = \sqrt{2^{26}} \cdot \sqrt{2^1} = 2^{13} \cdot \sqrt{2} = 8192\sqrt{2}.$$

Esempio 10

Calcola la somma dei primi cinque termini di una progressione geometrica avente ragione 3 e il cui primo termine è -1 .

Soluzione

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}; \quad S_5 = a_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} = -1 \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = -\frac{3^5 - 1}{2} = -121.$$

Esempio 11

Calcola la somma delle prime dieci potenze di 2 con esponente diverso da zero.

Soluzione

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}; \quad S_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 2 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2 \cdot (1024 - 1) = 2046.$$

Esempio 12

Determina il numero dei termini di una progressione geometrica avente ragione 2 , somma 51 e il cui primo termine è $\frac{1}{5}$.

Soluzione

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}; \quad 51 = \frac{1}{5} \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}; \quad 255 = 2^n - 1; \quad 2^n = 256; \quad 2^n = 2^8; \quad n = 8.$$

Esempio 13

Determina la somma della seguente progressione geometrica

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^6}$$

Soluzione

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} ; \quad S_7 = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^7 - 1}{\frac{1}{n} - 1} = \frac{\frac{1}{n^7} - 1}{\frac{1-n}{n}} = \frac{1-n^7}{n^7} \cdot \frac{n}{1-n} = \frac{1-n^7}{n^6 \cdot (1-n)} = \frac{n^7 - 1}{n^6 \cdot (n-1)} .$$

Esempio 14

Determina il numero dei termini di una progressione geometrica avente ragione $\frac{1}{2}$, secondo termine uguale a 16 ed n-esimo termine uguale a $\frac{1}{8}$.

Soluzione

$$a_n = a_s \cdot q^{n-s} ; \quad a_n = a_2 \cdot q^{n-2} ; \quad \frac{1}{8} = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} ; \quad \frac{1}{8 \cdot 16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} ;$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} ; \quad n-2 = 7 ; \quad n = 9 .$$

Esempio 15

Il primo termine di una progressione geometrica è 2, il sesto è 0,0625. Quanto vale il quinto termine.

Soluzione

Calcoliamo la ragione:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} ; \quad a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} ; \quad 0,0625 = 2 \cdot q^5 ; \quad \frac{1}{16} = 2 \cdot q^5 ; \quad \frac{1}{32} = q^5 ; \quad q = \frac{1}{2} .$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Calcoliamo il quinto termine:

$$a_n = q \cdot a_{n-1} \quad a_6 = \frac{1}{2} \cdot a_5 ; \quad 0,0625 = \frac{1}{2} \cdot a_5 ; \quad a_5 = 2 \cdot 0,0625 = 0,125 .$$

Esempio 16

Le lunghezze degli spigoli di un parallelepipedo rettangolo sono numeri interi e formano una progressione geometrica di ragione 2. Quale delle seguenti misure può rappresentare il volume del solido?

◇ 120 ◇ 188 ◇ 350 ◇ 500 ◇ nessuna delle precedenti

Soluzione

Le misure degli spigoli sono del tipo: x , $2x$ e $4x$.

Il volume del parallelepipedo è quindi: $V = x \cdot 2x \cdot 4x = 8x^3$.

Il volume del solido deve essere rappresentato da un numero dato dal prodotto di 8 con un numero cubo perfetto.

Le misure idonee sono: $8 \cdot 1^3 = 8$, $8 \cdot 2^3 = 64$, $8 \cdot 3^3 = 216$, $8 \cdot 4^3 = 512$

Pertanto nessuna delle precedenti misure può rappresentare il volume del solido.

Esempio 17

La somma fra il primo e il secondo termine di una progressione geometrica è 30, mentre la differenza fra il terzo e il primo è -15 . Determina la ragione della progressione.

Soluzione

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = +30 \\ a_3 - a_1 = -15 \end{cases} \quad \text{ma} \quad a_2 = a_1 \cdot q \quad e \quad a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 \cdot q = +30 \\ a_1 \cdot q^2 - a_1 = -15 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 \cdot (1 + q) = +30 \\ a_1 \cdot (q^2 - 1) = -15 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 \cdot (1 + q) = +30 \\ a_1 \cdot (1 - q^2) = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{30}{1+q} \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{30}{1+q} \cdot (1 - q^2) = 1 \\ \frac{30}{1+q} \cdot (1 + q) \cdot (1 - q) = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} 30 \cdot (1 - q) = 15 \\ 30 - 30q = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30q = 30 - 15 \\ 30q = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} q = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{30}{1 + \frac{1}{2}} = 2 \\ q = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10 \quad a_3 = a_1 \cdot q^2 = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 5.$$

Esempio 18

Un quadrilatero convesso ha le misure degli angoli in progressione geometrica e l'angolo più piccolo misura 24° . Calcola la misura degli altri angoli.

Soluzione

$$\hat{A} = 24 \quad \hat{B} = 24q \quad \hat{C} = 24q^2 \quad \hat{D} = 24q^3$$

Ricordando che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è 360° si ha:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360;$$

$$24 + 24q + 24q^2 + 24q^3 = 360;$$

$$24q^3 + 24q^2 + 24q - 336 = 0;$$

$$q^3 + q^2 + q - 14 = 0;$$

$$q^3 + q^2 + q - 14 = 0;$$

$$D_{18} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 7; \pm 14\}$$

$$(q - 2)(2q^2 + 3q + 7) = 0 \quad \begin{matrix} q - 2 = 0 \\ 2q^2 + 3q + 7 = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} q = 2 \\ \nexists x \in R \end{matrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -14 \\ +2 & & +2 & +6 \\ \hline 2 & +3 & +7 & = \end{array}$$

Pertanto:

$$\hat{B} = 24 \cdot 2 = 48$$

$$\hat{C} = 24q^2 = 24 \cdot 2^2 = 96$$

$$\hat{D} = 24q^3 = 24 \cdot 2^3 = 192.$$

Esempio 19

Per quale valore di a i tre numeri $a - 3$, a , $a + 4$ sono in progressione geometrica? Determina il settimo termine di questa progressione.

Soluzione

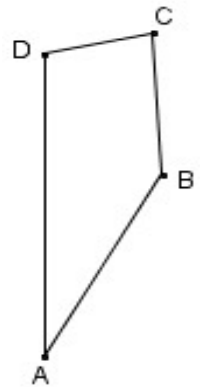
$$\frac{a}{a-3} = \frac{a+4}{a}; \quad \text{con } a \neq 0 \wedge a \neq 3$$

$$a^2 = (a-3)(a+4); \quad a^2 = a^2 + 4a - 3a - 12; \quad a = 12.$$

$$a_1 = a - 3 = 12 - 3 = 9; \quad a_2 = a = 12; \quad q = \frac{a}{a-3} = \frac{12}{12-3} = \frac{4}{3}$$

Calcoliamo il settimo termine:

$$a_7 = a_1 \cdot q^{7-1}; \quad a_7 = a_1 \cdot q^{7-1} = 9 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^6 = 9 \cdot \frac{4096}{729} = \frac{4096}{81}.$$



Esempio 20

Considera il triangolo equilatero in figura in cui M_1 è il punto medio di BC, $\overline{CM_2} = \frac{1}{4}\overline{AC}$, $\overline{CM_3} = \frac{1}{8}\overline{BC}$, $\overline{CM_4} = \frac{1}{16}\overline{AC}$. Dimostra che i lati della poligonale $AM_1M_2M_3M_4$ sono in progressione geometrica e calcola la sua lunghezza.

Soluzione

In un triangolo equilatero la mediana coincide con la bisettrice e l'altezza.

Pertanto,

nel triangolo equilatero ABC si ha:

$$\widehat{BAM_1} = 30^\circ \quad e \quad \widehat{AM_1B} = 90^\circ$$

nel triangolo equilatero CEM_1 si ha:

$$\widehat{M_1EM_2} = 60^\circ \quad e \quad \widehat{EM_2M_1} = 90^\circ$$

nel triangolo equilatero CDM_2 si ha:

$$\widehat{DM_2M_3} = 30^\circ \quad e \quad \widehat{M_2M_3D} = 90^\circ$$

...

$$\overline{AM_1} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BM_1}^2} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = \frac{l}{2}\sqrt{3}.$$

$$\overline{M_1M_2} = \sqrt{\overline{CM_1}^2 - \overline{CM_2}^2} = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{16}} = \sqrt{\frac{3}{16}l^2} = \frac{l}{4}\sqrt{3}.$$

$$\overline{M_2M_3} = \sqrt{\overline{CM_2}^2 - \overline{CM_3}^2} = \sqrt{\left(\frac{l}{4}\right)^2 - \left(\frac{l}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{l^2}{16} - \frac{l^2}{64}} = \sqrt{\frac{3}{64}l^2} = \frac{l}{8}\sqrt{3}.$$

$$\overline{M_3M_4} = \sqrt{\overline{CM_3}^2 - \overline{CM_4}^2} = \sqrt{\left(\frac{l}{8}\right)^2 - \left(\frac{l}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{l^2}{64} - \frac{l^2}{256}} = \sqrt{\frac{3}{256}l^2} = \frac{l}{16}\sqrt{3}.$$

I lati della poligonale sono in progressione geometrica di ragione $q = \frac{1}{2}$, infatti:

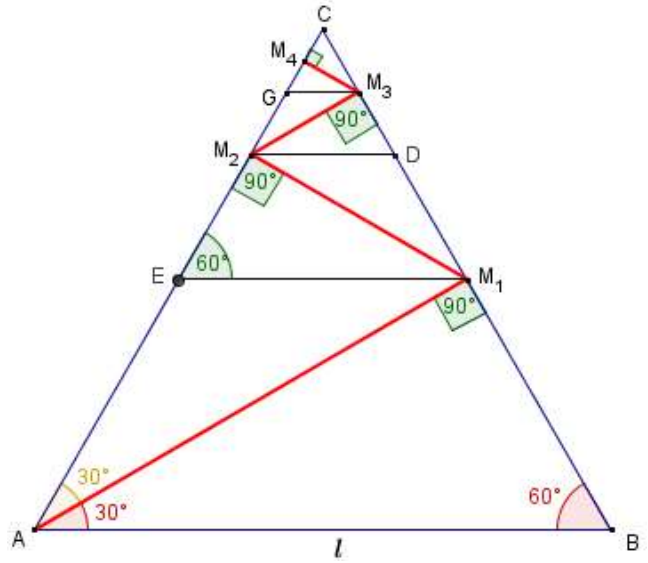
$$\frac{\overline{M_1M_2}}{\overline{AM_1}} = \frac{\frac{l}{4}\sqrt{3}}{\frac{l}{2}\sqrt{3}} = \frac{l}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{2}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\overline{M_2M_3}}{\overline{M_1M_2}} = \frac{\frac{l}{8}\sqrt{3}}{\frac{l}{4}\sqrt{3}} = \frac{l}{8}\sqrt{3} \cdot \frac{4}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\overline{M_3M_4}}{\overline{M_2M_3}} = \frac{\frac{l}{16}\sqrt{3}}{\frac{l}{8}\sqrt{3}} = \frac{l}{16}\sqrt{3} \cdot \frac{8}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{2}.$$

La lunghezza della poligonale è:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}; \quad S_4 = \frac{l}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{l}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{\frac{1}{16} - 1}{-\frac{1}{2}} = \frac{l}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{-\frac{15}{16}}{-\frac{1}{2}} = \frac{l}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{15}{8} = \frac{15}{16}\sqrt{3}l.$$



Esempio 21

La somma di tre numeri in progressione geometrica crescente è 21. Trova i tre numeri, sapendo che la somma dei loro reciproci è $\frac{7}{12}$.

Soluzione 1

Poniamo $a_1 = x$, $a_2 = y$, $a_3 = z$ si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 21 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{12} \\ \frac{y}{x} = \frac{z}{y} \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 21 \\ \frac{yz + xz + xy}{xyz} = \frac{7}{12} \\ y^2 = xz \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 21 \\ \frac{yz + y^2 + xy}{y^2 \cdot y} = \frac{7}{12} \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 21 \\ \frac{y \cdot (z + y + x)}{y^2 \cdot y} = \frac{7}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 21 \\ \frac{z + y + x}{y^2} = \frac{7}{12} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{21}{y^2} = \frac{7}{12} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{21}{y^2} = \frac{7}{12} \end{cases} \quad \begin{cases} 7y^2 = 12 \cdot 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 36 \end{cases} \quad \begin{cases} y_{1,2} = \begin{matrix} -6 & \text{non accettabile} \\ +6 & \text{accettabile} \end{matrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 6 + z = 21 \\ \frac{6}{x} = \frac{z}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} x + 6 + z = 21 \\ z = \frac{36}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} x + 6 + \frac{36}{x} = 21 \\ z = \frac{36}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 36 = 21x \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 15x + 36 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{1,2} = \frac{15 \mp \sqrt{81}}{2} = \frac{15 \mp 9}{2} = \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 12 \end{matrix} \end{cases}$$

Otteniamo le due terne di soluzioni: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 6 \\ z_1 = 12 \end{cases}$ e $\begin{cases} x_1 = 12 \\ y_1 = 6 \\ z_1 = 3 \end{cases}$

Essendo la progressione geometrica crescente, è accettabile la prima terna, cioè:

$$a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 12.$$

Soluzione 2

Poniamo $a_1 = x$, $a_2 = qx$, $a_3 = q^2x$ si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} x + qx + q^2x = 21 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{qx} + \frac{1}{q^2x} = \frac{7}{12} \end{cases} \quad \begin{cases} x \cdot (1 + q + q^2) = 21 \\ \frac{q^2 + q + 1}{q^2x} = \frac{7}{12} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{21}{1 + q + q^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{q^2 + q + 1}{q^2 \cdot \frac{21}{1 + q + q^2}} = \frac{7}{12} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(q^2 + q + 1)^2}{21q^2} = \frac{7}{12} \end{cases} \quad \begin{cases} 4(q^2 + q + 1)^2 = 49q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \cdot (q^4 + q^2 + 1 + 2q^3 + 2q^2 + 2q) = 49q^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4q^4 + 4q^2 + 4 + 8q^3 + 8q^2 + 8q - 49q^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4q^4 + 8q^3 - 37q^2 + 8q + 4 = 0 \end{cases}$$

$$4q^4 + 8q^3 - 37q^2 + 8q + 4 = 0 ;$$

$$(q - 2) \cdot (4q^3 + 16q^2 - 5q) = 0 ;$$

$$(q - 2) \cdot \left(q - \frac{1}{2}\right) \cdot (4q^2 + 18q + 4) = 0 ;$$

$$q - 2 = 0 ; \quad q = 2 \quad \text{Accettabile}$$

$$q - \frac{1}{2} = 0 ; \quad q = \frac{1}{2} \quad \text{Non accettabile}$$

$$4q^2 + 18q + 4 = 0 ; \quad q_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{65}}{4}$$

non accettabili perché entrambe negative.

	4	+8	-37	+8	4
+2		+8	+32	-10	-4
	4	+16	-5		-2
$+\frac{1}{2}$		+2	+9		+2
	4	+18	+4		

Esempio 22

Calcola la somma dei primi sei termini della progressione geometrica $a_n = -3 \cdot (-5)^n$, con $n \in N$.

Soluzione

$$a_n = -3 \cdot (-5)^n$$

Siccome $n \in N$, il valore n parte da zero.

$$a_0 = -3 \cdot (-5)^0 = -3$$

$$a_1 = -3 \cdot (-5)^1 = 15$$

. . .

$$a_5 = -3 \cdot (-5)^5$$

1° termine	2° termine	3° termine	4° termine	5° termine	6° termine
a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
-3	15	. . .	. . .	. . .	$-3 \cdot (-5)^5$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} ;$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} ;$$

$$-3 \cdot (-5)^5 = -3 \cdot q^5 ;$$

$$q^5 = \frac{3 \cdot (-5)^5}{3} ;$$

$$q^5 = (-5)^5 ;$$

$$q = -5 ;$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} ; \quad S_6 = a_0 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} \quad S_6 = -3 \cdot \frac{(-5)^6 - 1}{-5 - 1} = \frac{(-5)^6 - 1}{2} = 7812 .$$

Esempio 23

Calcola la somma dei primi sette termini della successione: 3, -12, 48, -192, . . .

Soluzione

Si tratta di una progressione geometrica di ragione: $q = \frac{-12}{3} = \frac{48}{-12} = \frac{-192}{48} = -4$

e primo termine $a_1 = 3$.

Pertanto:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} ; \quad S_7 = 3 \cdot \frac{(-4)^7 - 1}{-4 - 1} = 3 \cdot \frac{(-4)^7 - 1}{-5} = 9831 .$$

Esempio 24

Il primo termine e il centesimo termine di una progressione geometrica sono 3 e 100 000. Quanto vale il prodotto del quarto termine con il novantasettesimo?

Soluzione

Il prodotto del quarto termine con il novantasettesimo vale:

$$a_4 \cdot a_{97} = a_1 \cdot a_{100} = 3 \cdot 100\,000 = 300\,000.$$

a_1	a_2	a_3	a_4		a_{97}	a_{98}	a_{99}	a_{100}
3								100 000

Diagram illustrating the geometric progression terms a_1 through a_{100} . The first term a_1 is 3, and the 100th term a_{100} is 100 000. The product of the 4th term a_4 and the 97th term a_{97} is shown as 300 000. The product of the 1st term a_1 and the 100th term a_{100} is also shown as 300 000.

Esempio 25

Calcola la somma delle prime n potenze di 2 con esponente maggiore di zero.

Soluzione

La prima potenza di 2 con esponente maggiore di zero è $2^1 = 2$. L' n -esima potenza di 2 è 2^n .

Applicando la formula della somma dei termini di una progressione geometrica si ottiene:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}; \quad S_n = 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2 \cdot (2^n - 1).$$

Esempio 26

Calcola la somma delle prime n potenze di $\frac{1}{2}$ con esponente maggiore di zero.

Soluzione

$$\text{La somma è: } \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

La prima potenza di $\frac{1}{2}$ con esponente maggiore di zero è $\frac{1}{2}$. L' n -esima potenza di $\frac{1}{2}$ è $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Applicando la formula della somma dei termini di una progressione geometrica si ottiene:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}; \quad S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

Esempio 27

Calcola la seguente somma: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$.

Soluzione 1

Si tratta di una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{2}$. I termini di questa somma sono $n + 1$.

Applicando la formula della somma dei termini di una progressione geometrica si ottiene:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}; \\ S_{n+1} &= 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 2 \cdot \left[1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right] = 2 \cdot \left[\frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}\right] = \\ &= 2 \cdot \left[\frac{2^{n+1} - 1}{2 \cdot 2^n}\right] = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}. \end{aligned}$$

Soluzione 2

È sufficiente aggiungere 1 alla somma delle prime n potenze di $\frac{1}{2}$ con esponente maggiore di zero, calcolata nell'esempio precedente.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{2^n - 1}{2^n} = \frac{2^n + 2^n - 1}{2^n} = \frac{2 \cdot 2^n - 1}{2^n} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}$$

Esempio 28

Calcola la seguente somma: $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$.

Soluzione 1

Si tratta di una progressione geometrica di ragione x . I termini di questa somma sono $n + 1$.

Applicando la formula della somma dei termini di una progressione geometrica si ottiene:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1};$$

$$S_{n+1} = 1 \cdot \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad \text{con } x \neq 1.$$

Soluzione 2

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1};$$

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + S_n = 1 + x \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1} = 1 + x \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1} = 1 + \frac{x \cdot x^n - x}{x - 1} = 1 + \frac{x^{n+1} - x}{x - 1} = \\ &= \frac{x - 1 + x^{n+1} - x}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad \text{con } x \neq 1. \end{aligned}$$