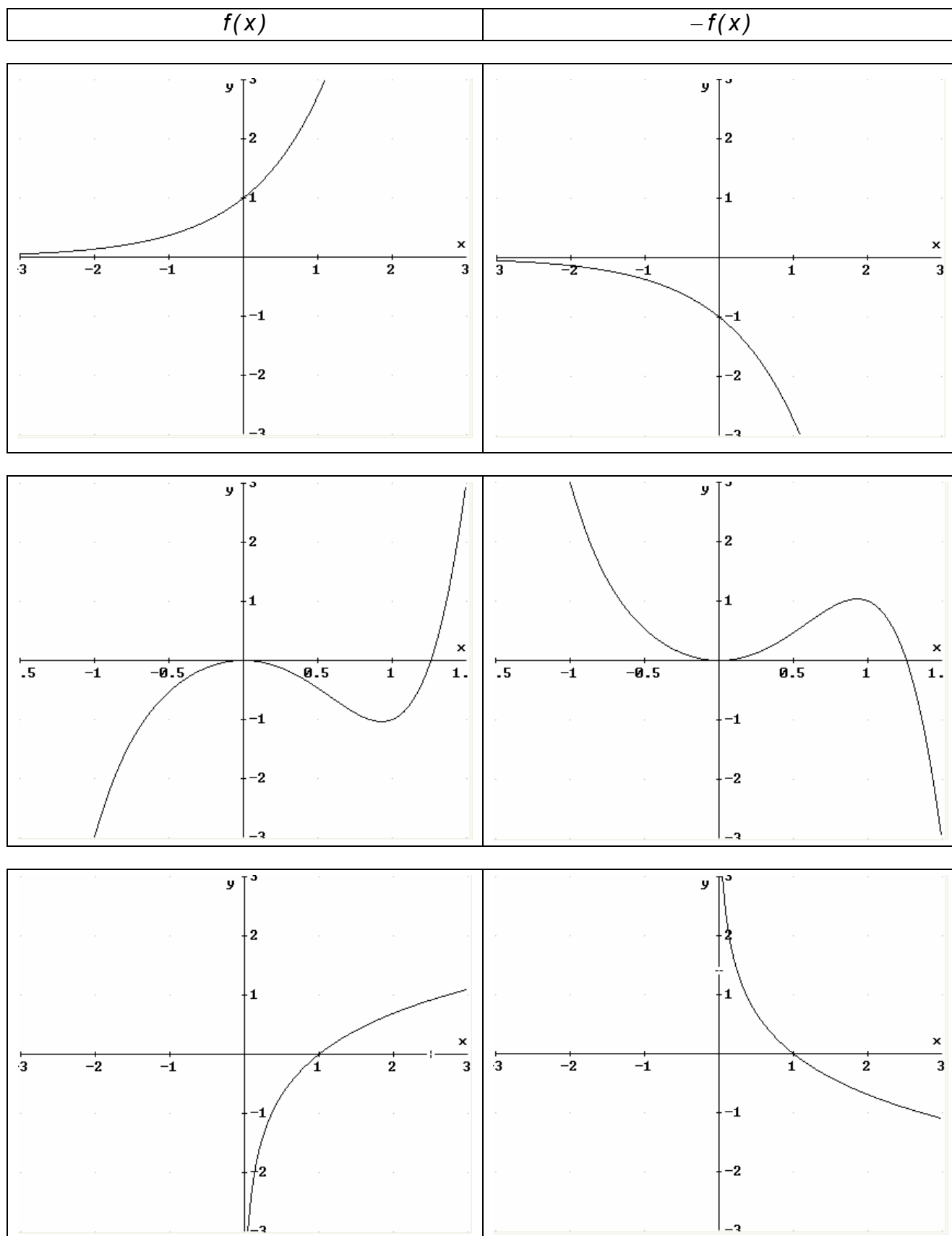


GRAFICI DEDUCIBILI DA QUELLI DELLE FUNZIONI NOTE

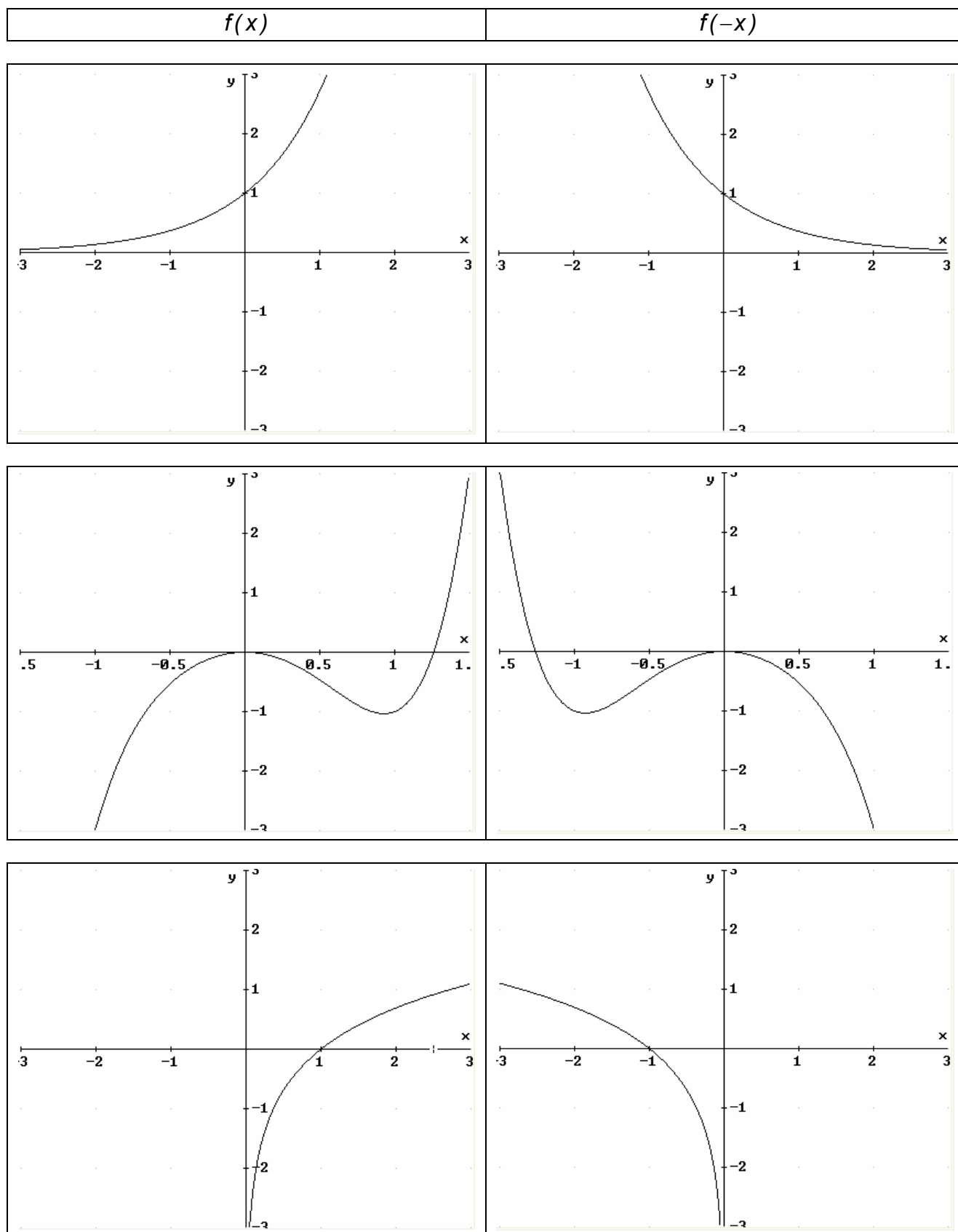
Funzione opposta $y = -f(x)$

Il grafico della funzione $-f(x)$ si ottiene simmetrizzando rispetto all'asse x , il grafico della funzione $f(x)$.



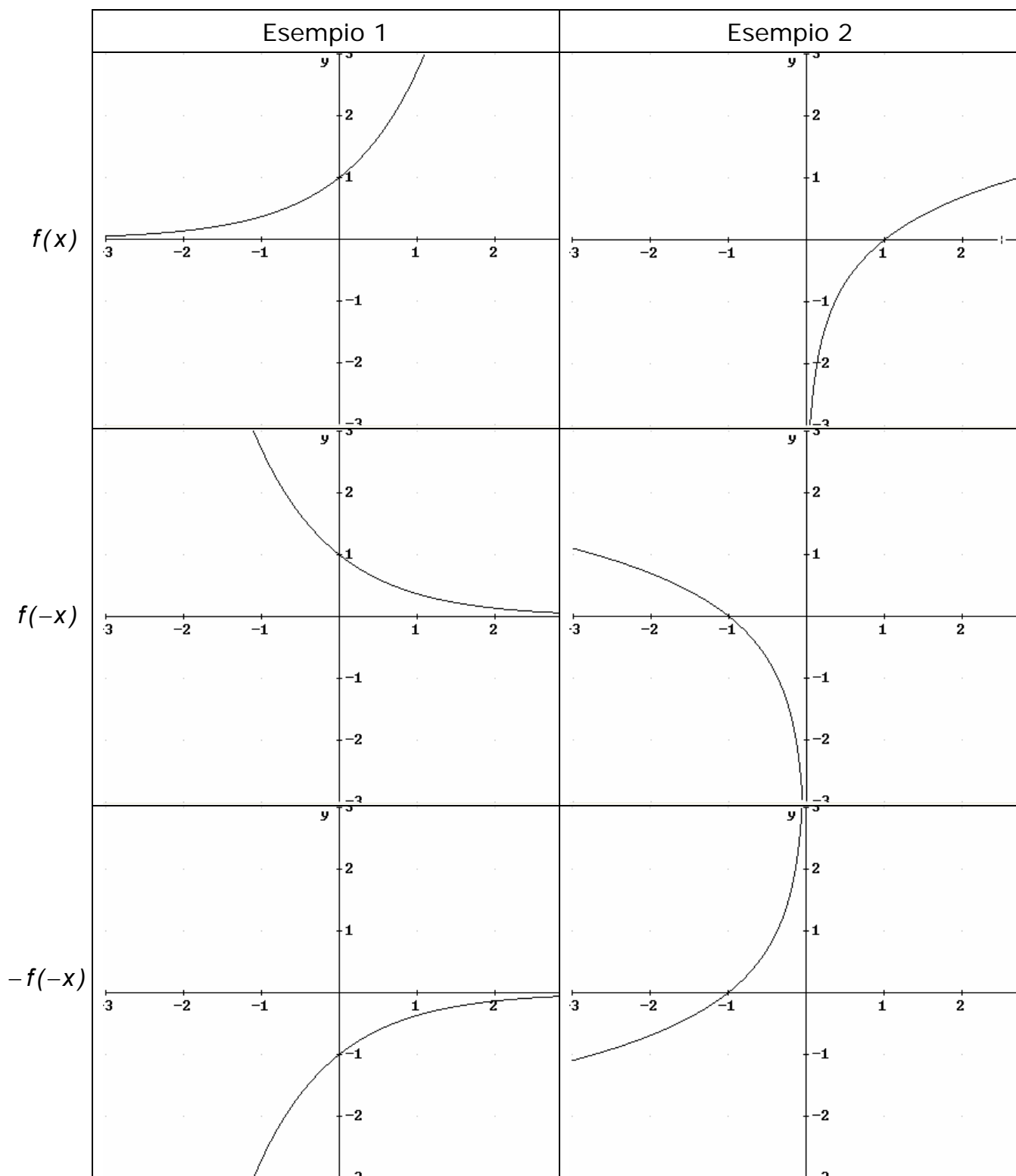
Funzione simmetrica $y = f(-x)$

Il grafico della funzione $f(-x)$ si ottiene simmetrizzando rispetto all'asse y , il grafico della funzione $y = f(x)$.



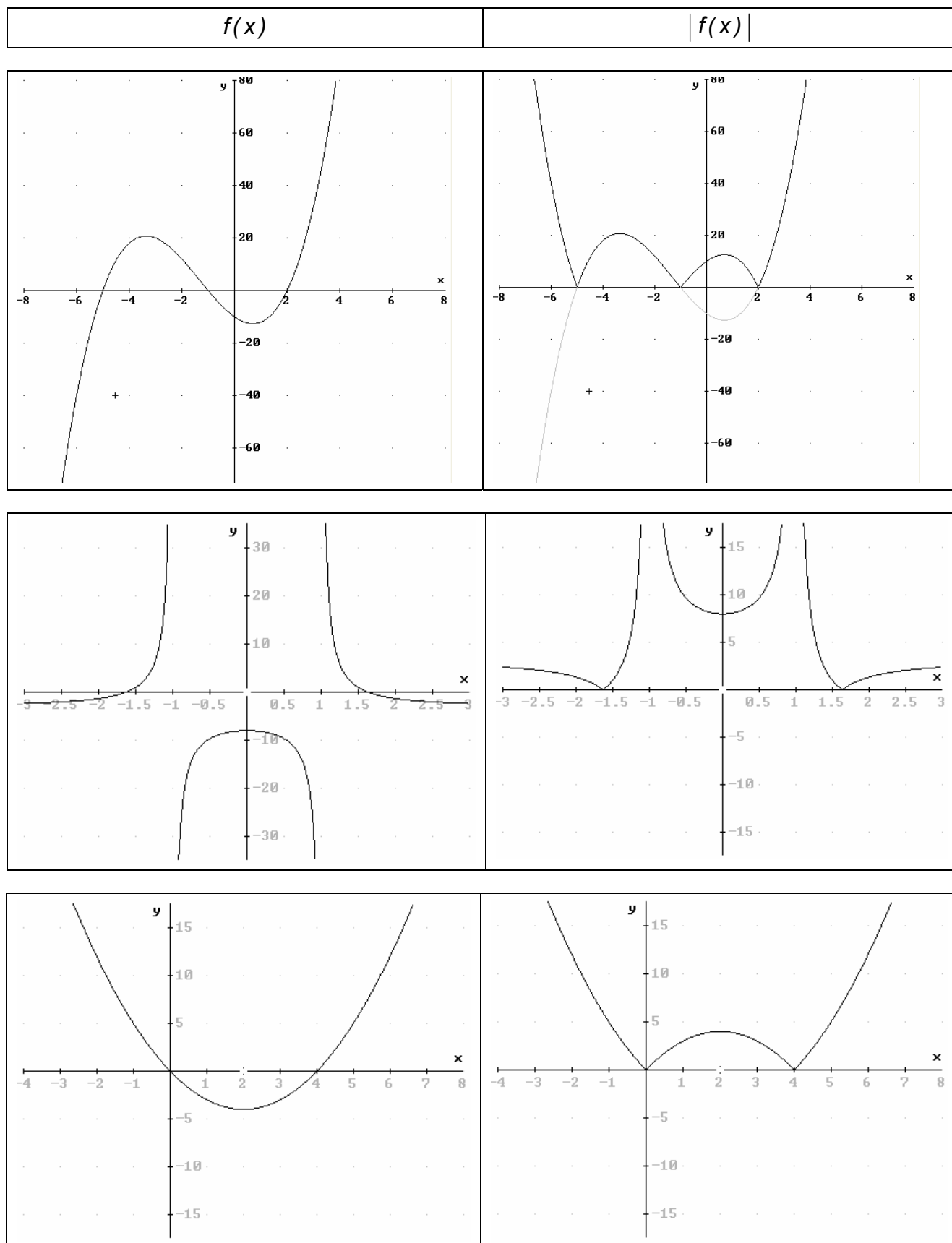
Funzione simmetrica dell'opposto $y = -f(-x)$

Il grafico della funzione $-f(-x)$ è il simmetrico rispetto all'origine di quello della funzione $f(x)$. Esso si ottiene simmetrizzando il grafico della funzione $f(x)$, prima rispetto all'asse y e poi rispetto all'asse x (o viceversa),



Funzione valore assoluto (1) $y = |f(x)|$

Il grafico della funzione $|f(x)|$ si ottiene tracciando il grafico della funzione $y = f(x)$ ed in seguito simmetrizzando rispetto all'asse x la parte di grafico che si trova sotto l'asse x . I punti di intersezione con l'asse x sono punti angolosi.

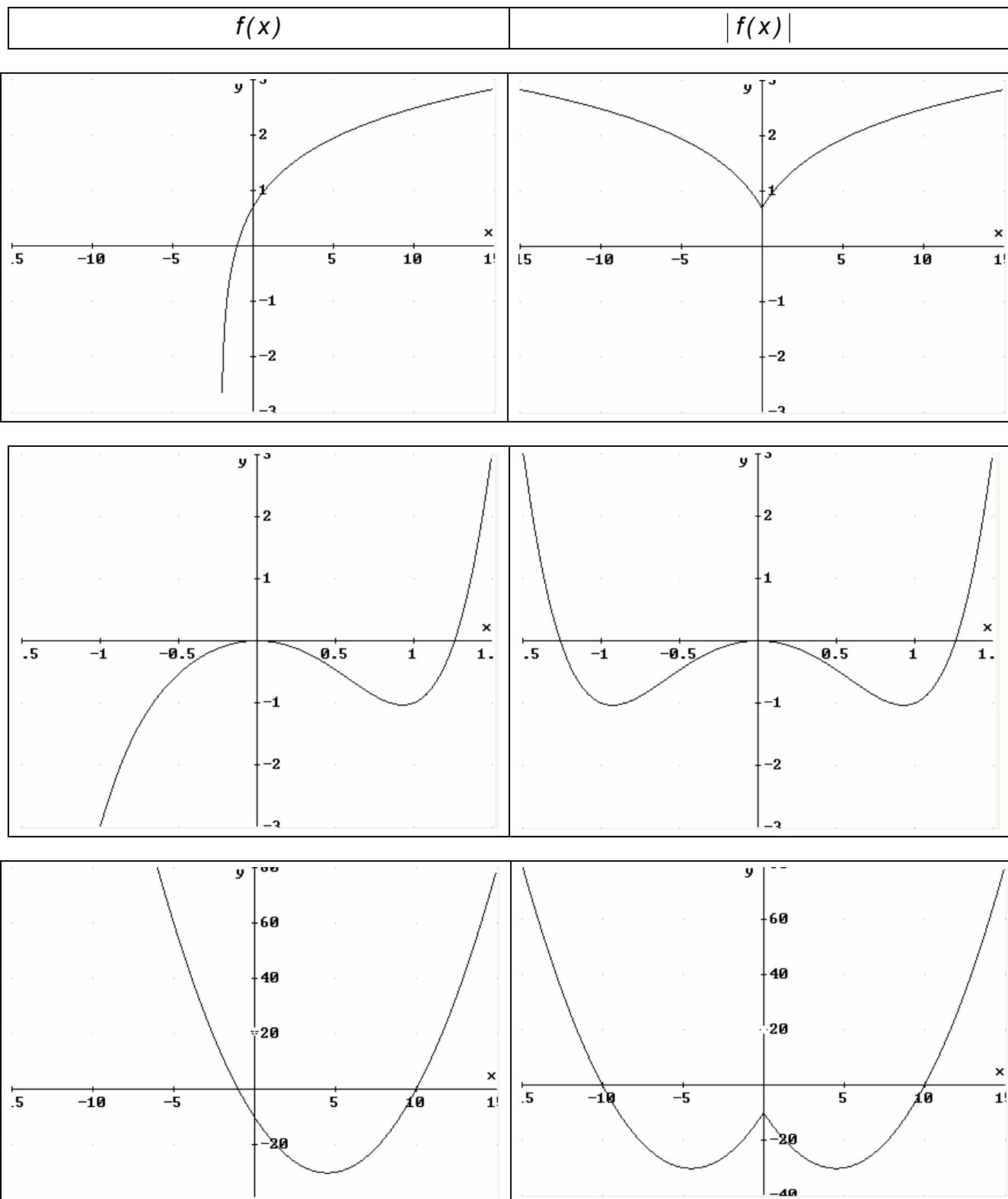


Funzione valore assoluto (2) $y = f(|x|)$

Il grafico della funzione $f(|x|)$ è costituito:

- nel semipiano $x \geq 0$, dal grafico della funzione $f(x)$
- nel semipiano $x < 0$, dal grafico simmetrico rispetto all'asse y della funzione $f(x)$.

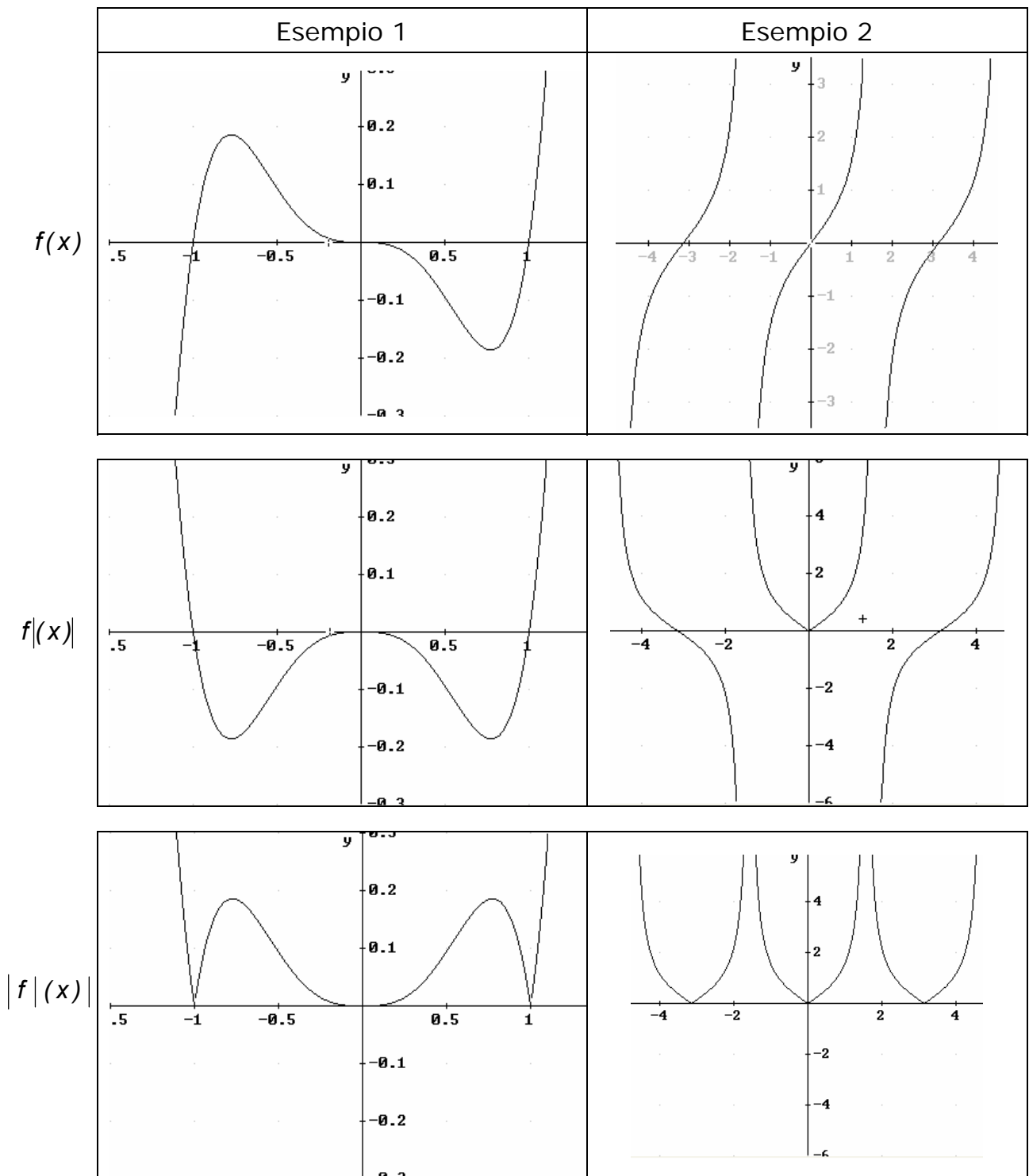
I punti di intersezione con l'asse y sono punti angolosi.



Funzione valore assoluto (3) $y = |f(x)|$

Il grafico della funzione $|f(x)|$ si costruisce con il seguente procedimento:

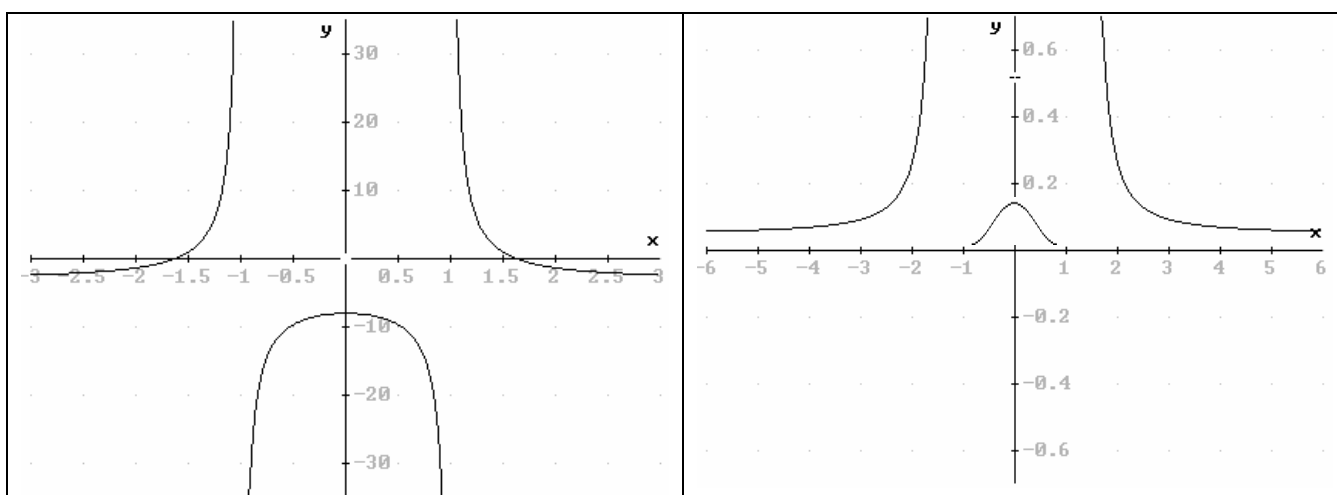
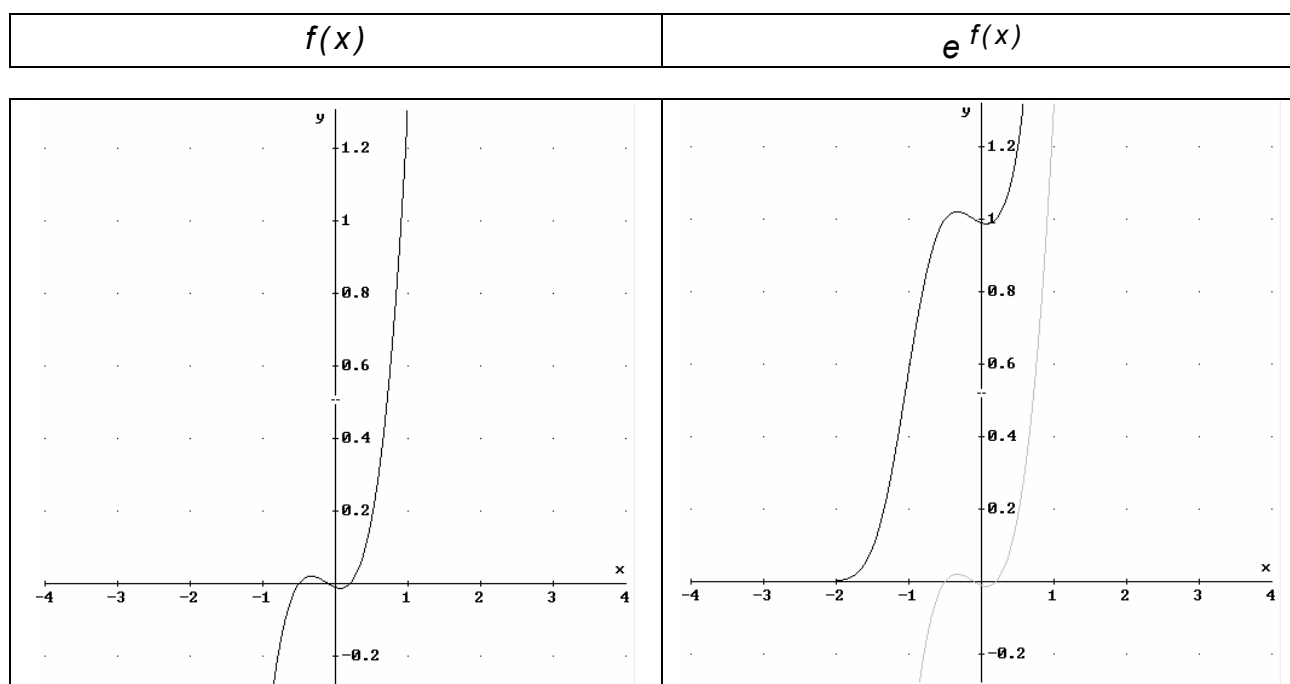
- si traccia il grafico di $f(x)$
- si traccia il grafico di $f(|x|)$
- si traccia il grafico $|f(x)|$.
- Tutti i punti di intersezione con gli assi x e y sono punti angolosi.



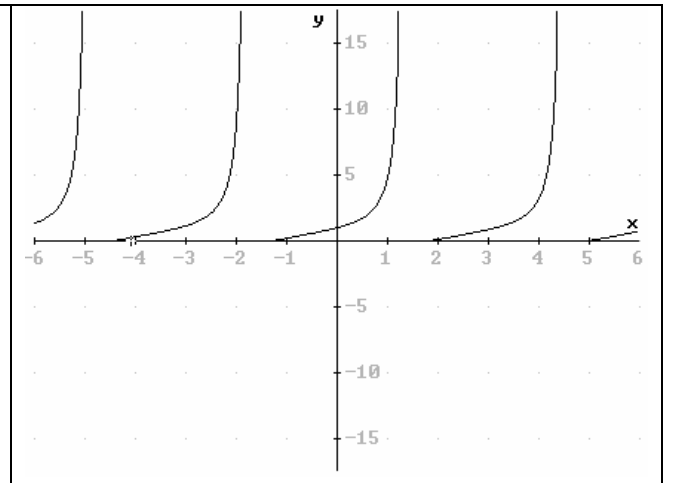
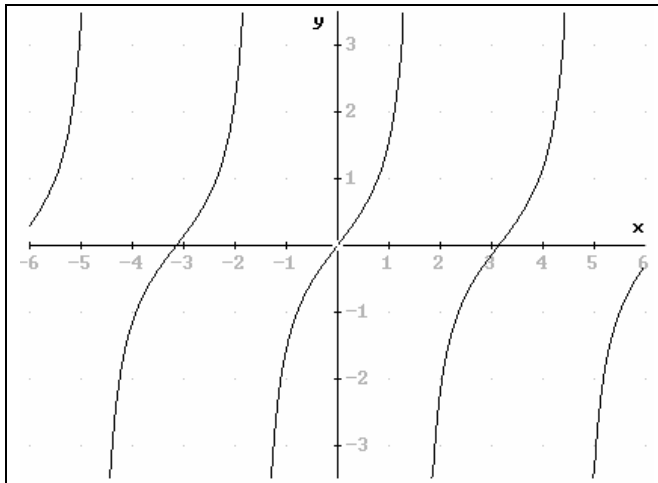
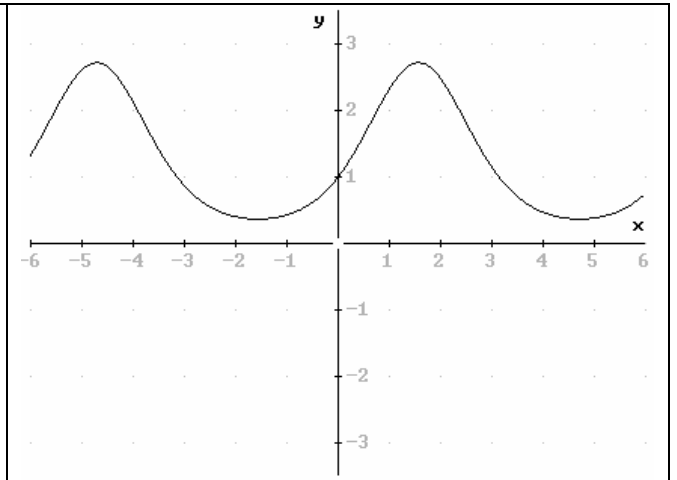
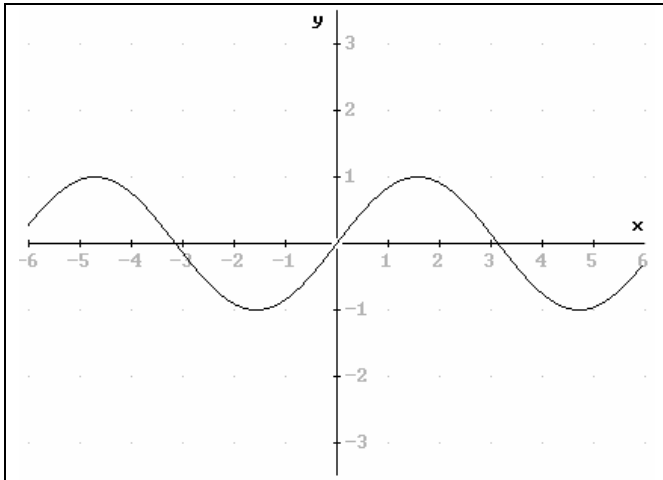
Funzione esponenziale $y = e^{f(x)}$

Il grafico della funzione esponenziale $e^{f(x)}$ è tutto al di sopra dell'asse x. Esso si ottiene da quello di $f(x)$ applicando all'esponente e , i valori significativi di $f(x)$ (massimi, minimi, incontro con gli assi).

$f(x)$	$y = e^{f(x)}$
x_0 Max relativo	x_0 Max relativo
x_0 Min relativo	x_0 Min relativo
x_0 Flesso	x_0 Flesso
Nei punti in cui $f(x_0) = 0$	$e^{f(x_0)} = 1$
Se $f(x) \rightarrow +\infty$	$e^{f(x)} \rightarrow +\infty$
Se $f(x) \rightarrow -\infty$	$e^{f(x)} \rightarrow 0^+$



$f(x)$	$e^{f(x)}$
--------	------------

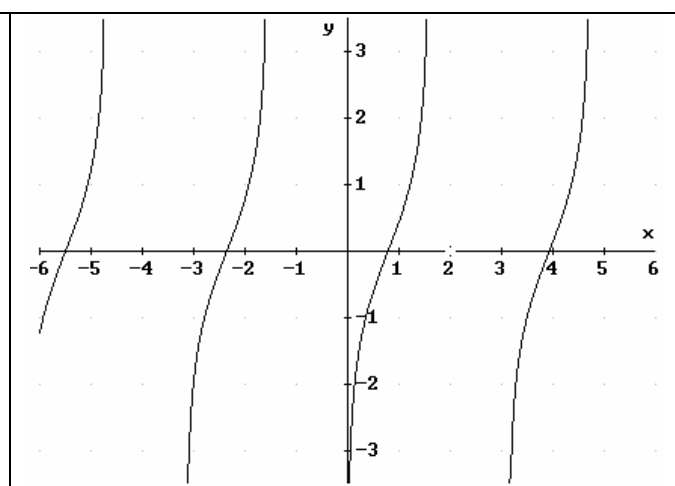
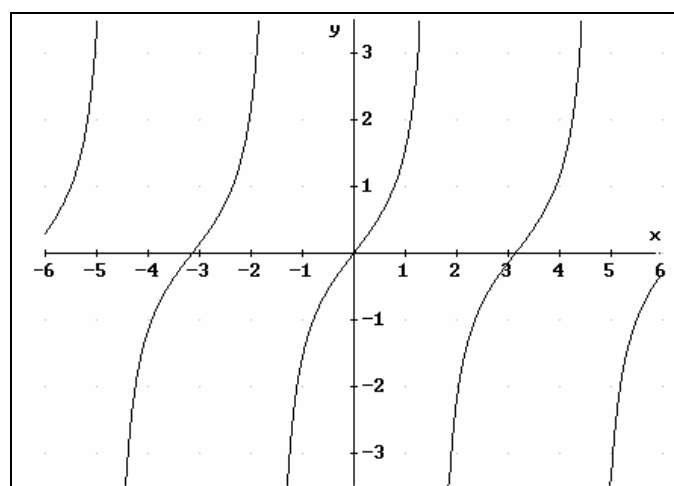
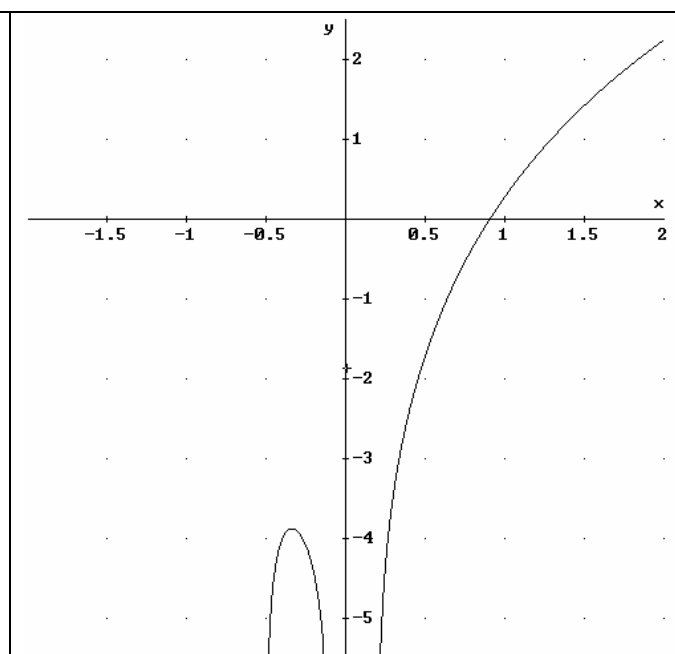
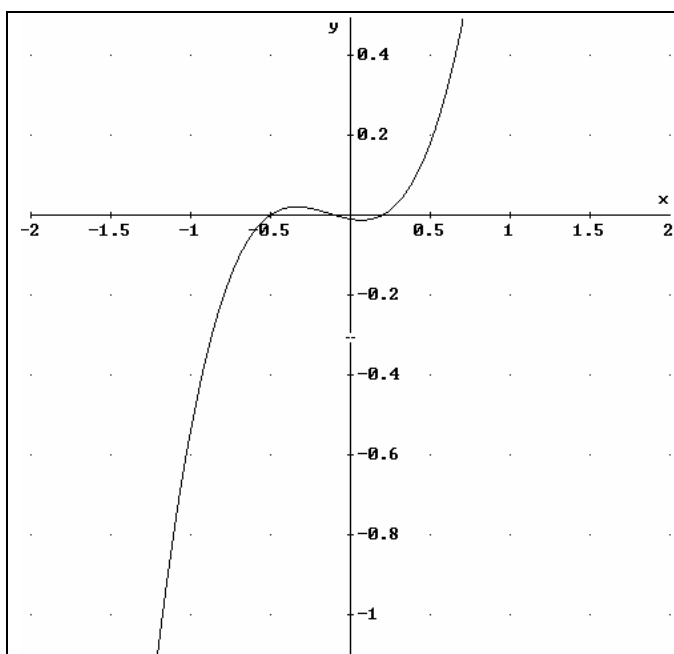


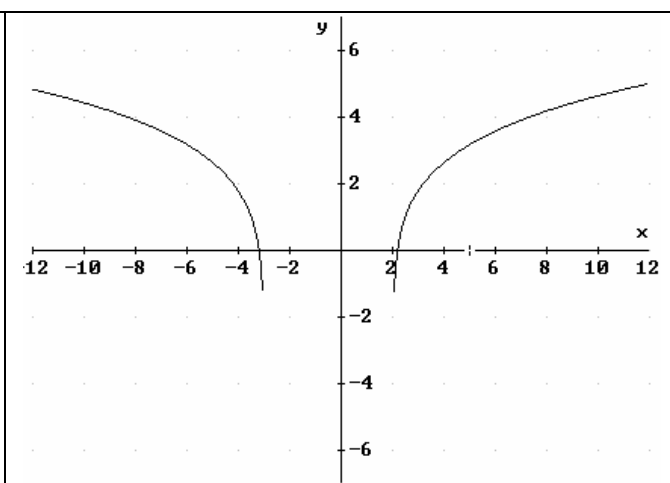
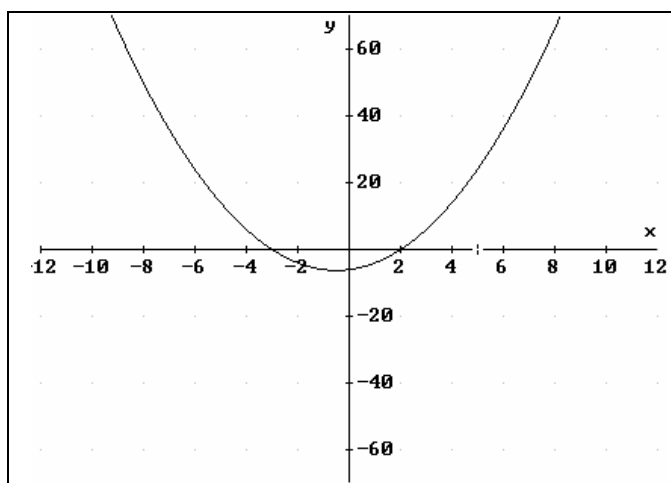
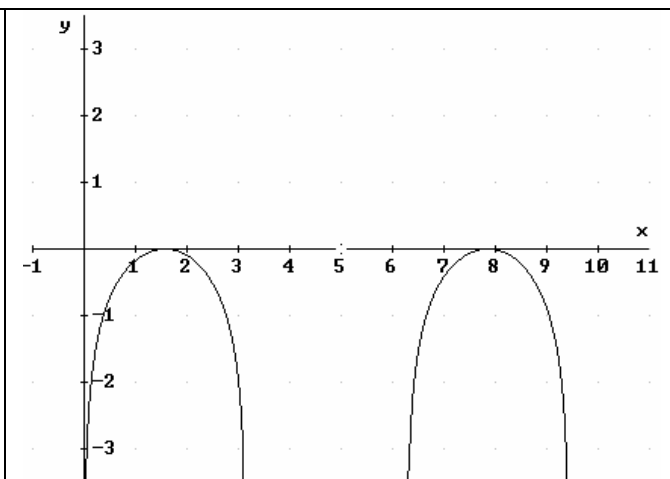
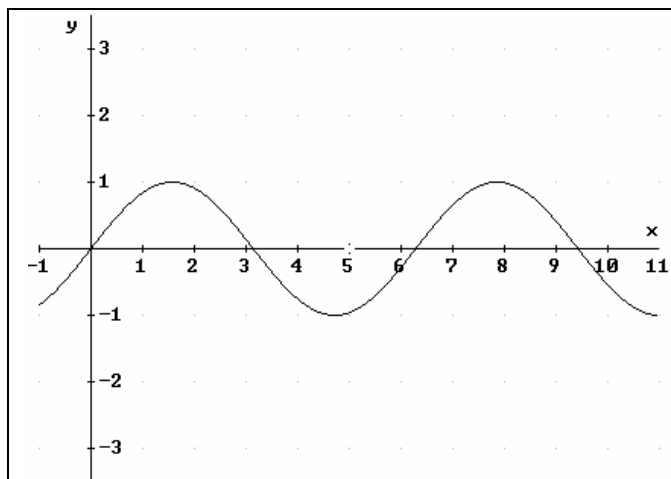
Funzione logaritmica $y = \log_a f(x)$ (con $a > 1$)

Il grafico della funzione logaritmica $\log_a f(x)$ si ottiene da quello della funzione $f(x)$ applicando al logaritmo i valori significativi di $f(x)$ (massimi, minimi, incontro con gli assi).

$f(x)$	$\log_a f(x)$
x_0 Max relativo	x_0 Max relativo
x_0 Min relativo	x_0 Min relativo
Nei punti in cui $f(x_0) = 1$	$\log_a f(x_0) = 0$
Se $f(x) \rightarrow +\infty$	$\log_a f(x) \rightarrow +\infty$
Se $f(x) \rightarrow 0^+$	$\log_a f(x) \rightarrow -\infty$
Negli intervalli dove $f(x)$ è negativa	$\log_a f(x)$ non esiste

$f(x)$	$\ln f(x)$
--------	------------



$f(x)$ $\ln f(x)$ 

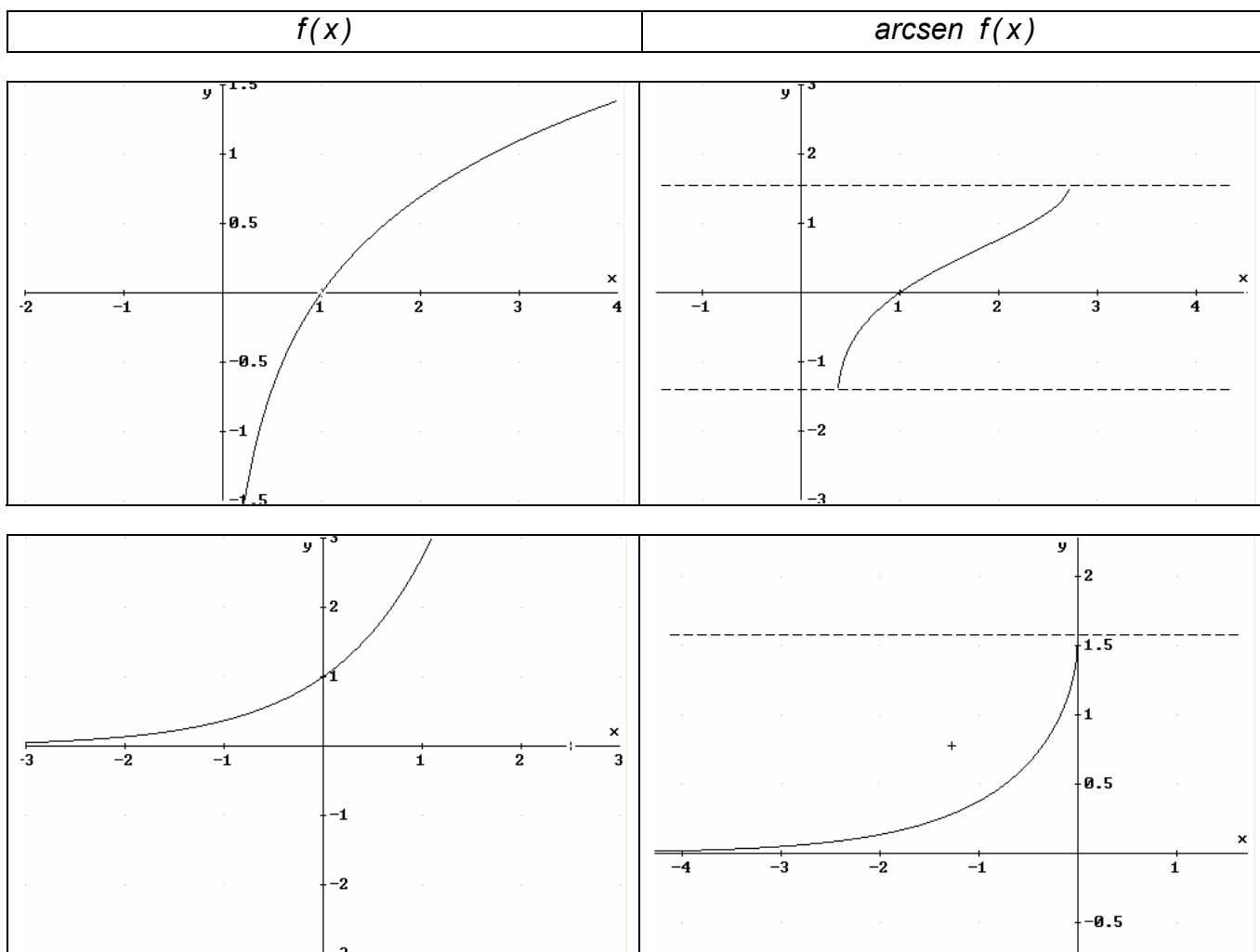
Funzione arcoseno $y = \arcsen f(x)$

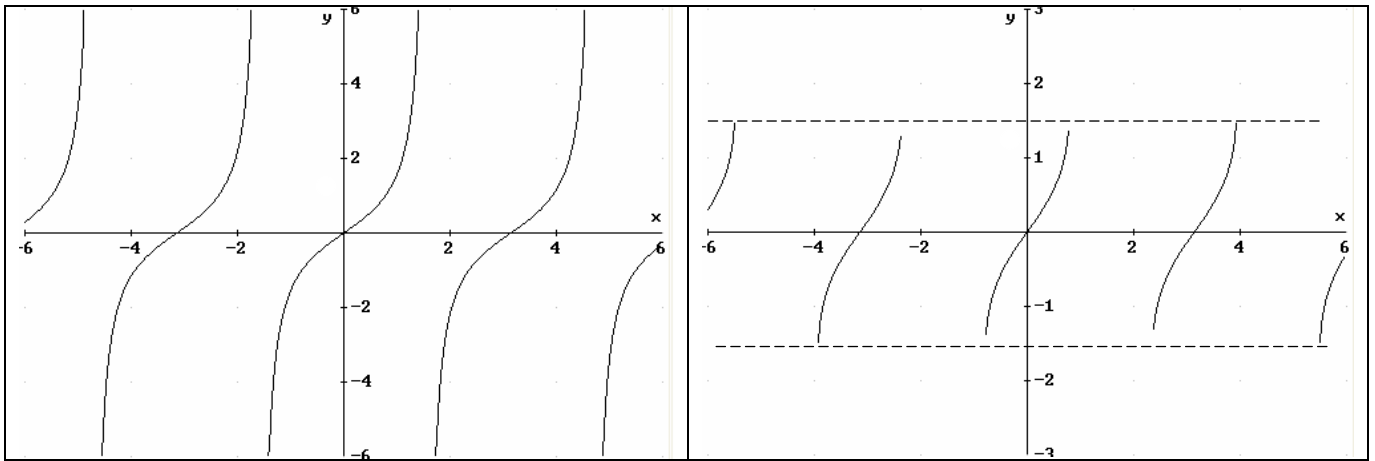
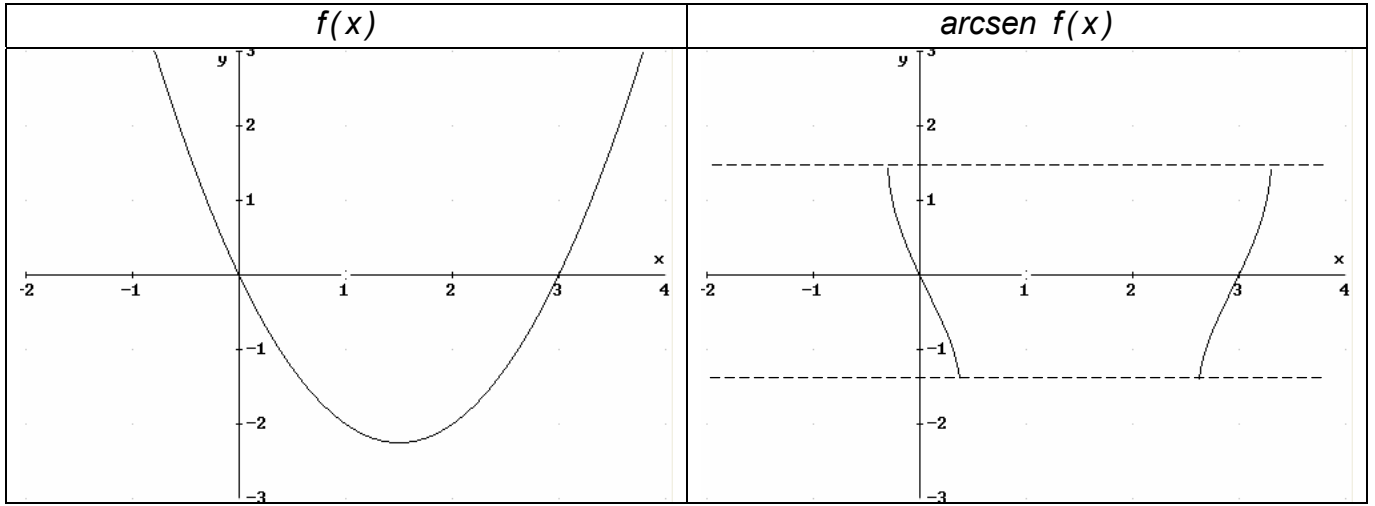
Il grafico della funzione $\arcsen f(x)$ si ottiene considerando soltanto gli intervalli nei quali $-1 \leq f(x) \leq 1$.

Il grafico di $\arcsen f(x)$ si ottiene:

1. disegnando il suo grafico caratteristico, prendendo come centro di simmetria i punti in cui $f(x)$ tocca l'asse x e nel cui intorno la funzione è crescente;
2. disegnando il simmetrico rispetto all'asse verticale del suo grafico caratteristico, prendendo come centro di simmetria i punti in cui $f(x)$ tocca l'asse x e nel cui intorno la funzione è decrescente.

$f(x)$	$\arcsen f(x)$
Nei punti in cui $f(x) = 0$	$\arcsen f(x) = 0$ e in esso c'è un flesso
Nei punti in cui $f(x_0) = -1$	$\arcsen f(x) = -\frac{\pi}{2}$
Nei punti in cui $f(x_0) = 1$	$\arcsen f(x) = \frac{\pi}{2}$
	Il grafico di $\arcsen f(x)$ è racchiuso fra le rette $y = -\frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{\pi}{2}$

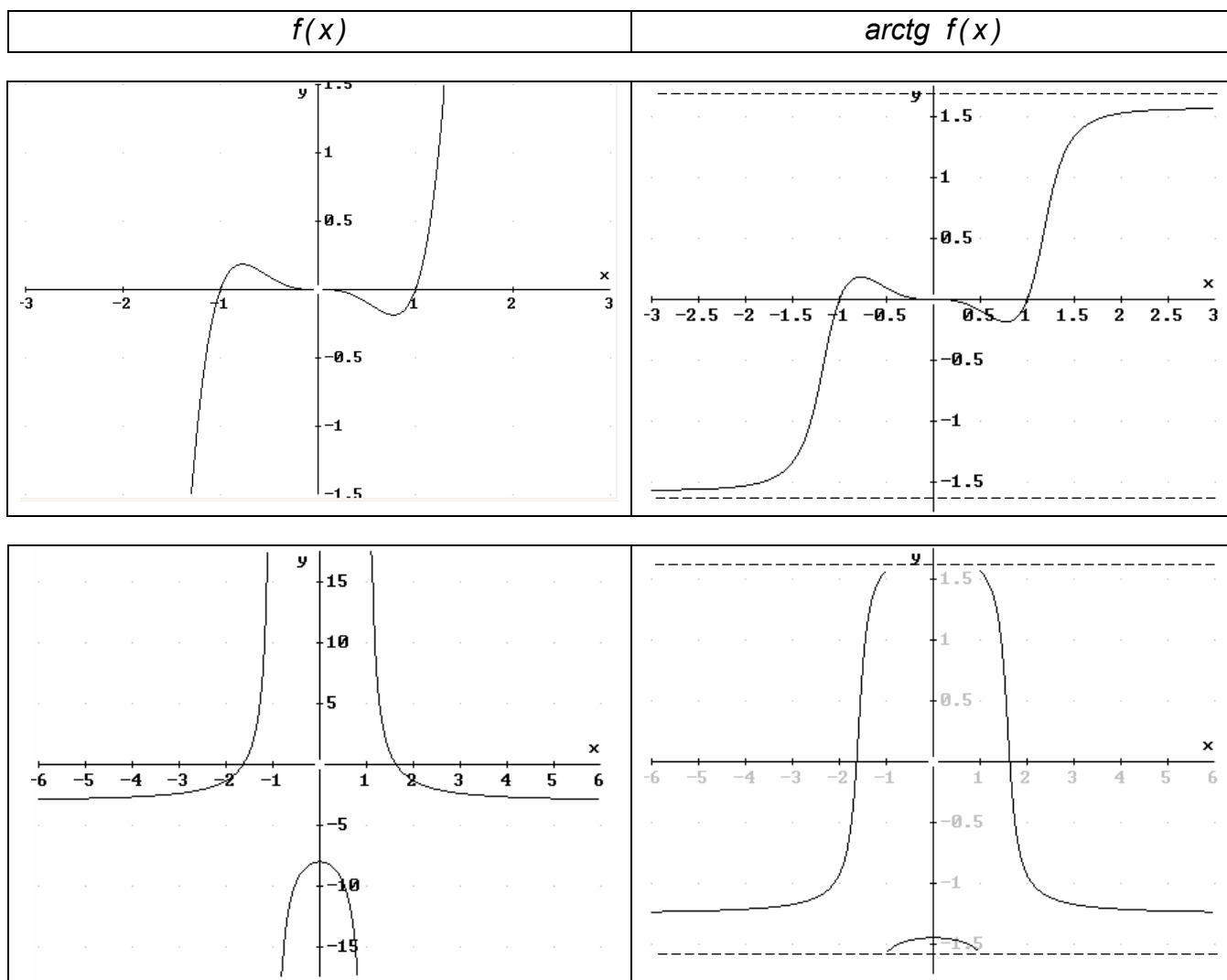


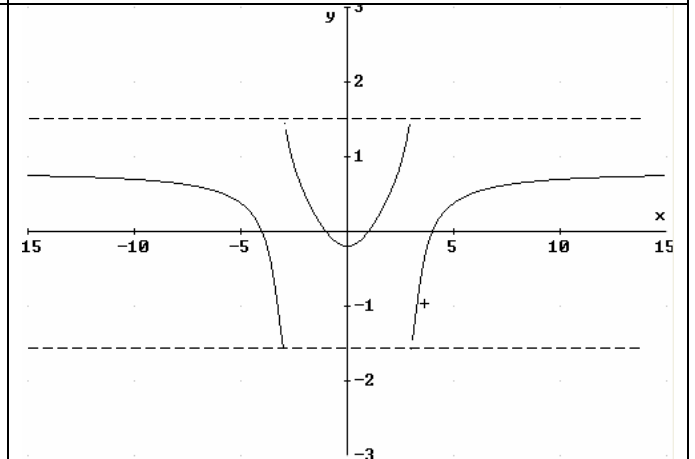
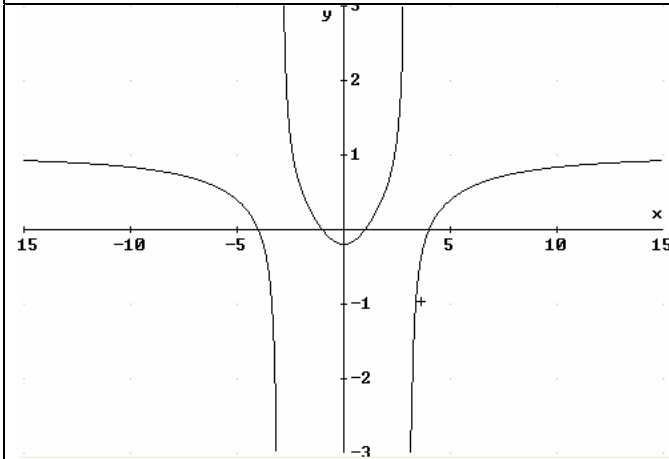
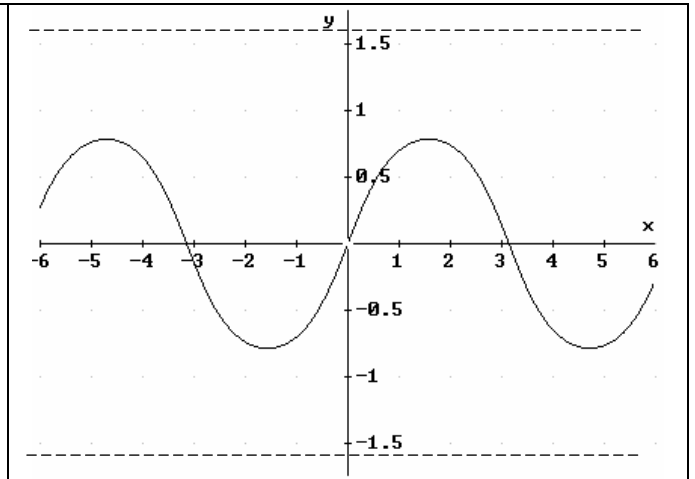
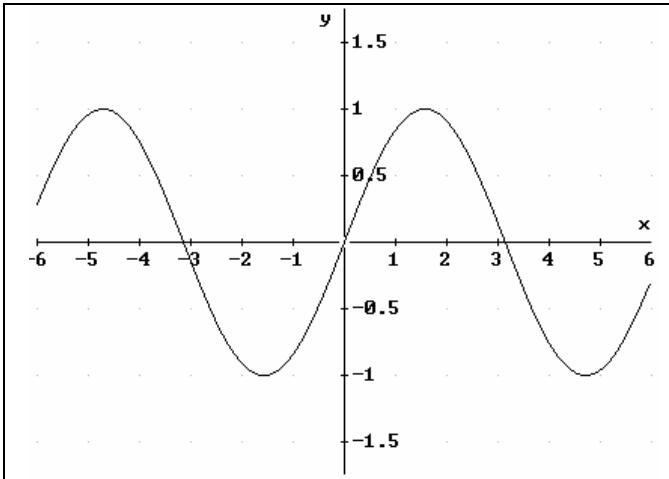


Funzione arcotangente $y = \text{arctg } f(x)$

Il grafico della funzione arcotangente $\text{arctg } f(x)$ si ottiene da quello della funzione $f(x)$ applicando all'arcotangente i valori significativi di $f(x)$ (massimi, minimi, incontro con gli assi).

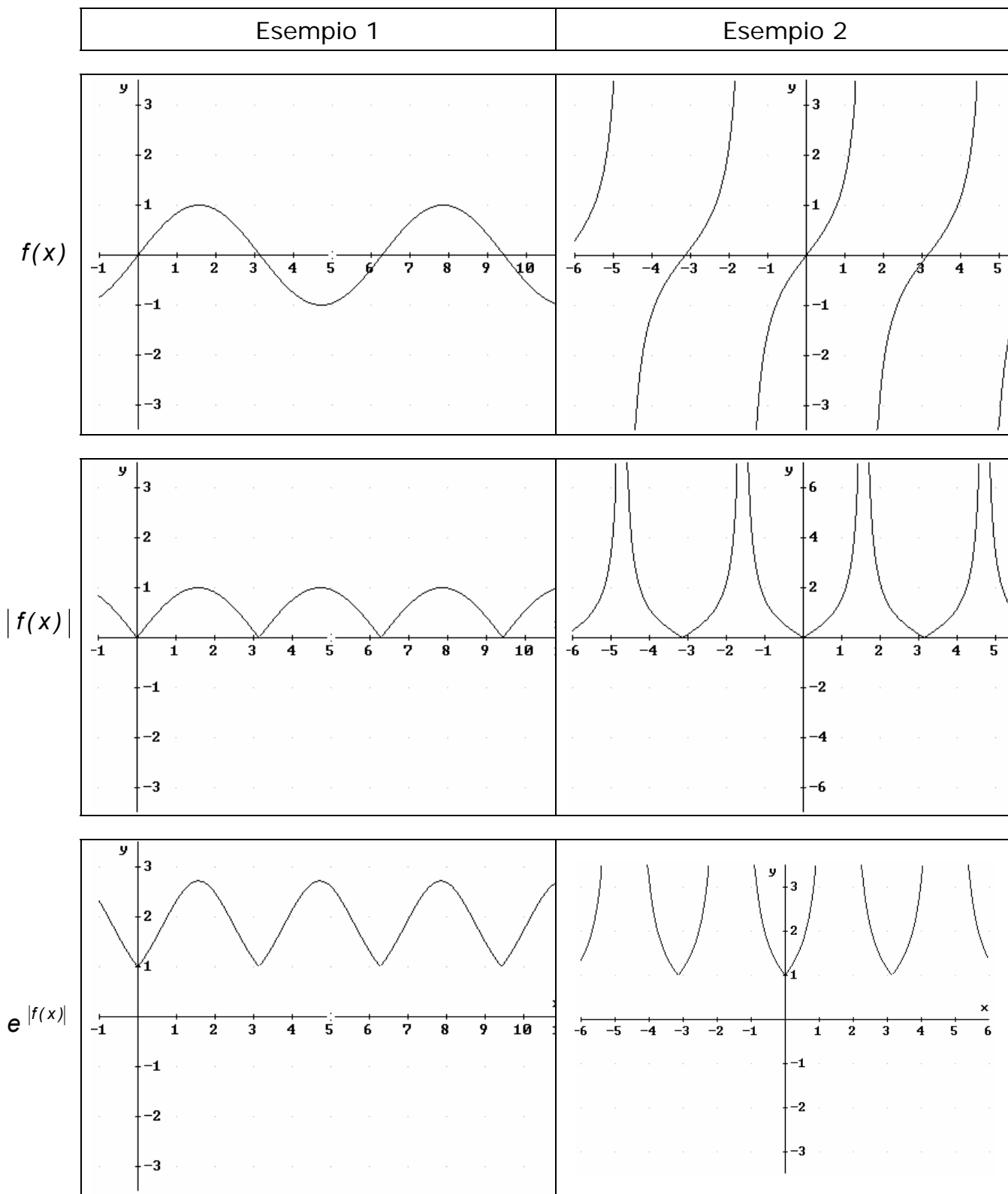
$f(x)$	$\text{arctg } f(x)$
x_0 Max relativo	x_0 Max relativo
x_0 Min relativo	x_0 Min relativo
x_0 Flesso relativo	x_0 Flesso relativo
Nei punti in cui $f(x) = 0$	$\text{arctg } f(x) = 0$
Se $f(x) \rightarrow -\infty$	$\text{arctg } x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+$
Se $f(x) \rightarrow +\infty$	$\text{arctg } x \rightarrow +\frac{\pi}{2}^-$
	Il grafico di $\text{arctg } f(x)$ è racchiuso fra le rette $y = -\frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{\pi}{2}$



$f(x)$ $\arctg f(x)$ 

Funzione esponenziale con argomento in valore assoluto $y = e^{|f(x)|}$

Il grafico della funzione $y = e^{|f(x)|}$ si ottiene applicando prima le considerazioni riguardanti il valore assoluto ed in seguito quelle relative all'esponenziale.



Funzione logaritmica con argomento in valore assoluto $y = \log_a |f(x)|$ ($a > 1$)

Il grafico della funzione $\log_a |f(x)|$ si ottiene applicando prima le considerazioni riguardanti il valore assoluto ed in seguito quelle relative al logaritmo.

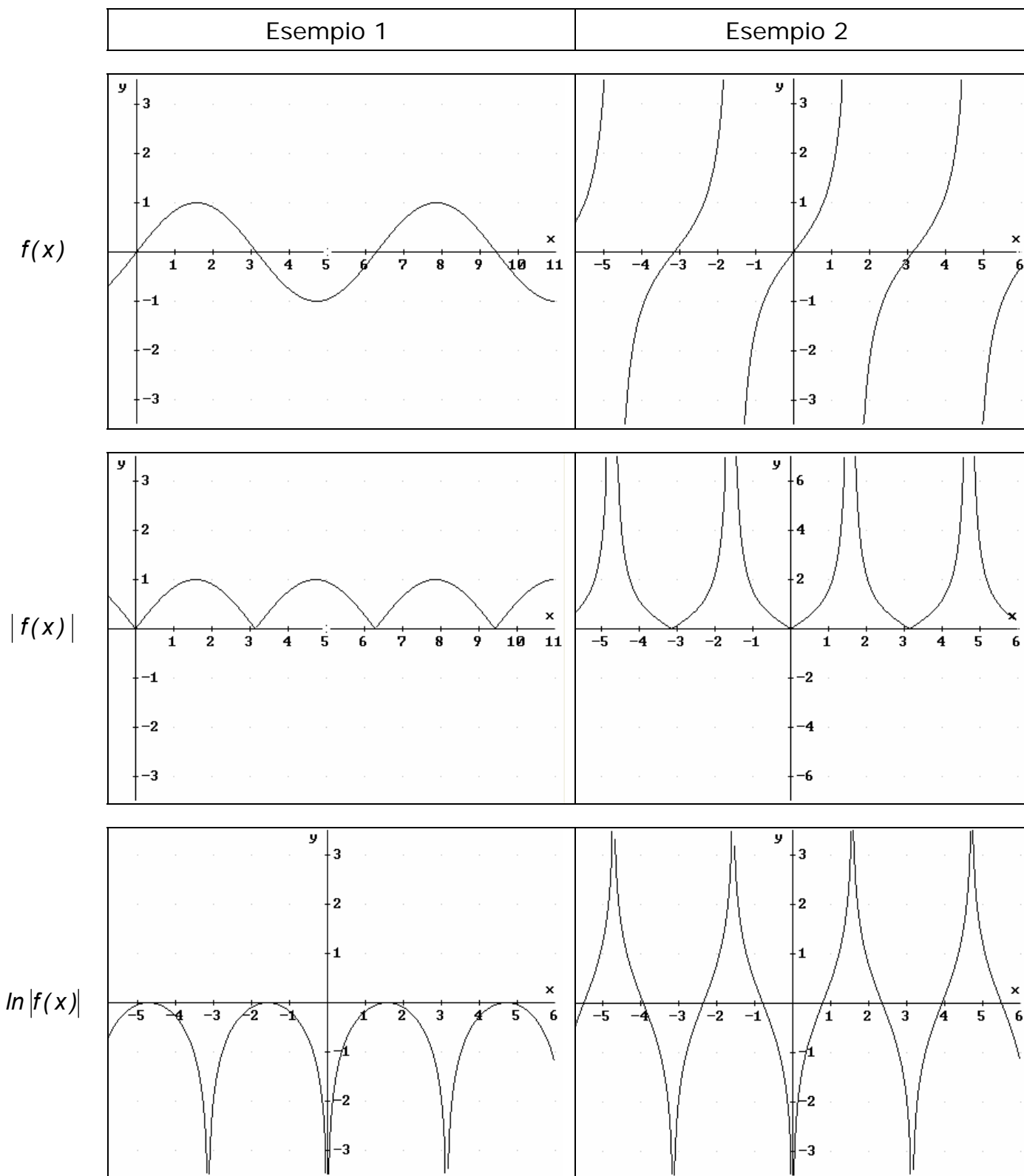


GRAFICO TRASLATO (1) $y = f(x) + k$

Il grafico della funzione $f(x) + k$ si ottiene trasladando con ampiezza k il grafico della funzione $f(x)$:

- verso l'alto se $k > 0$
- verso il basso se $k < 0$

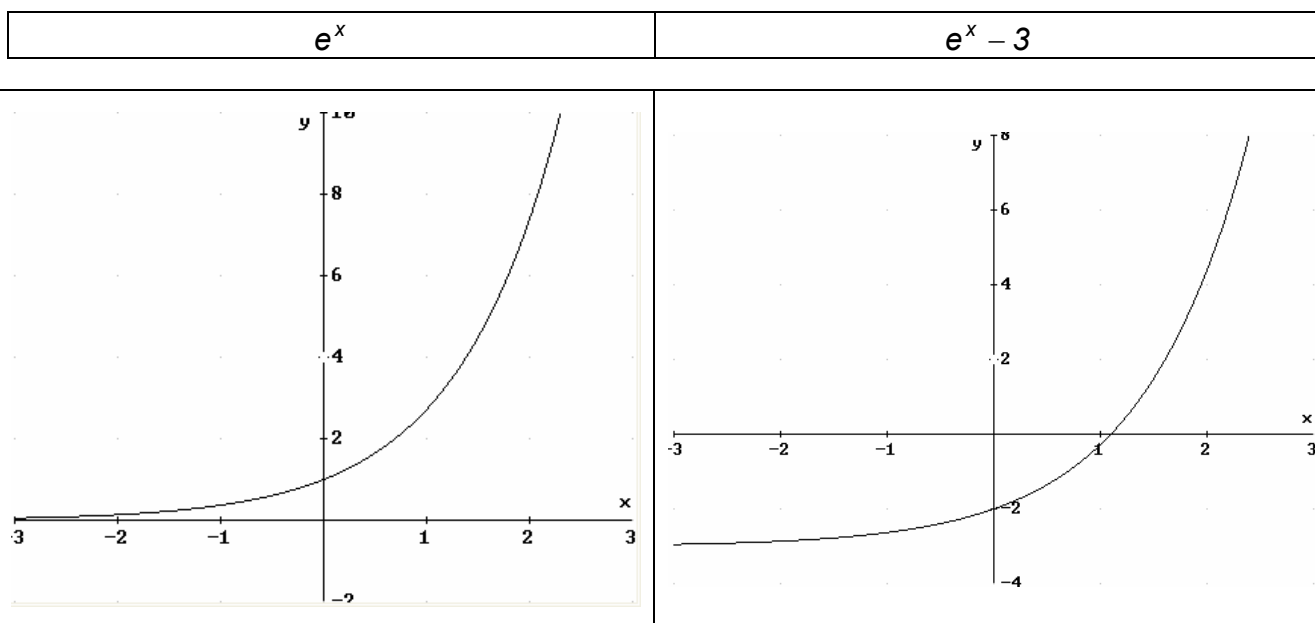
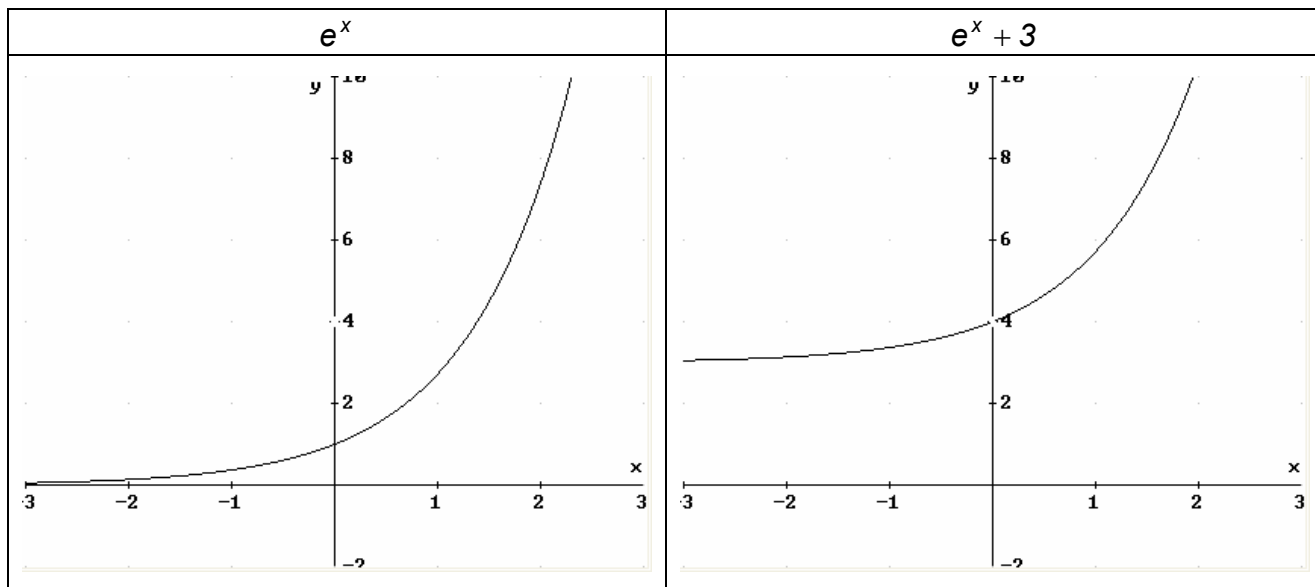
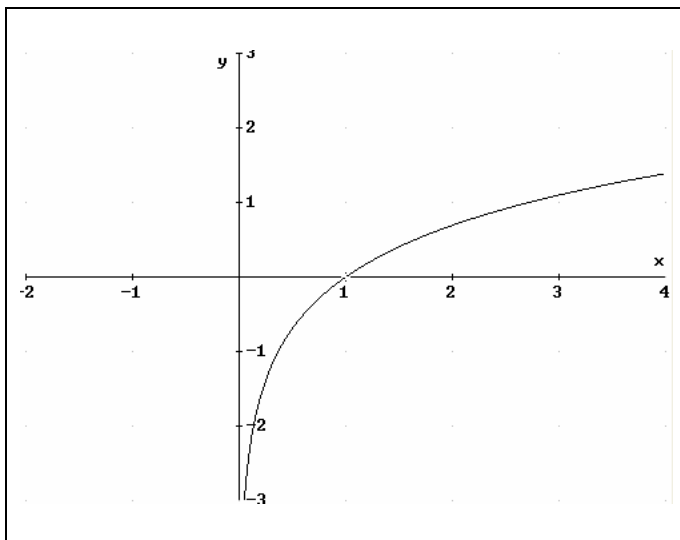


GRAFICO TRASLATO (2) $y = f(x+k)$

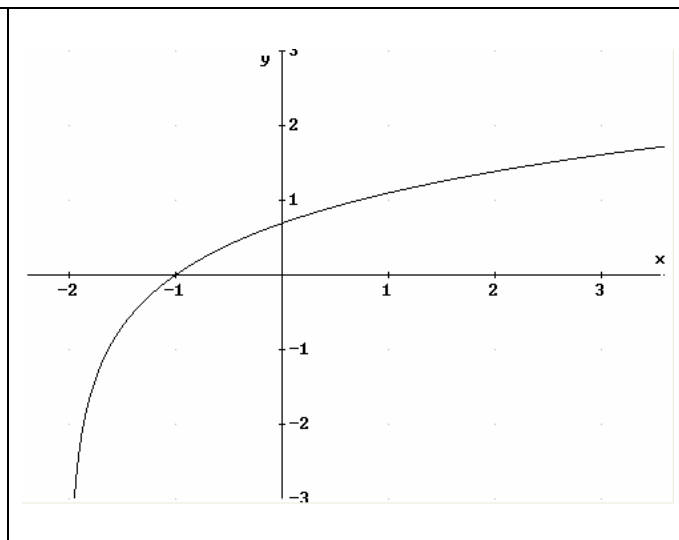
Il grafico della funzione $f(x+k)$ si ottiene trasladando con ampiezza k il grafico della funzione $f(x)$:

- verso sinistra se $k > 0$
- verso destra se $k < 0$

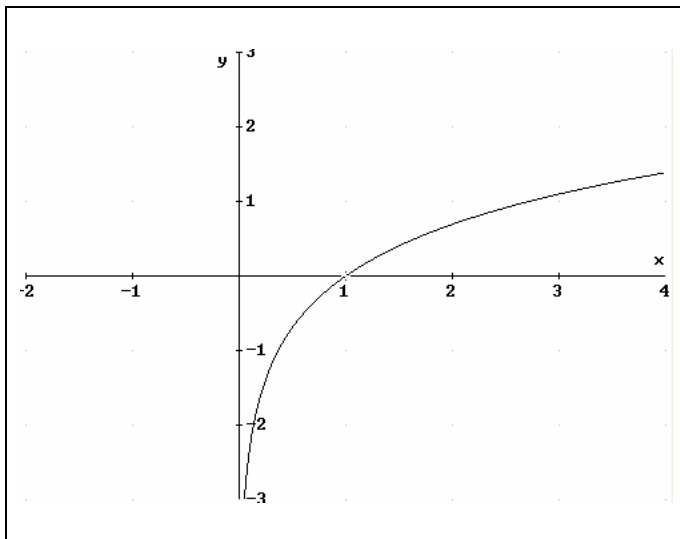
$\log_e x$



$\log_e (x + 2)$



$\log_e x$



$\log_e (x - 2)$

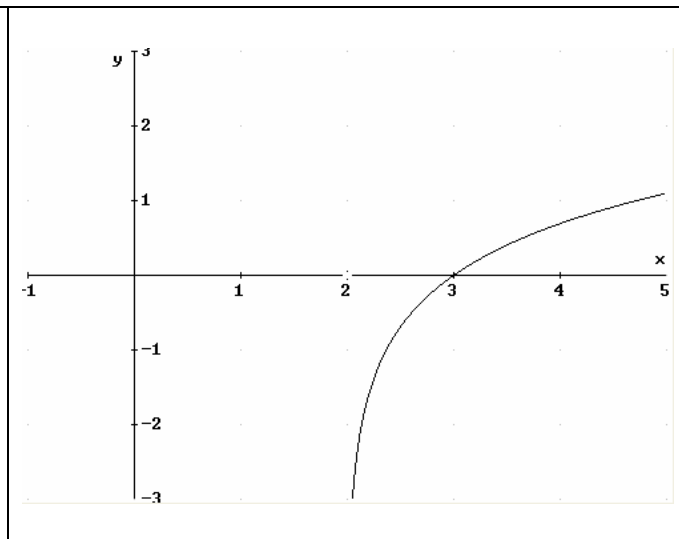


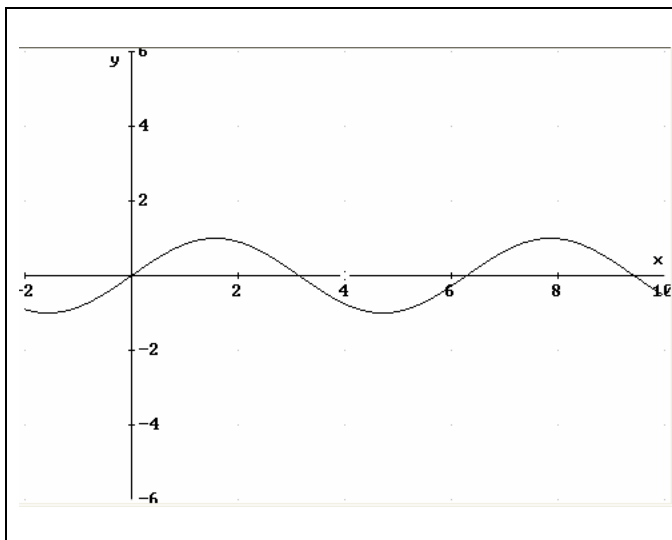
GRAFICO DILATATO (1) $y = f(k \cdot x)$

Il grafico della funzione $f(k \cdot x)$ si ottiene dal grafico della funzione $f(x)$:

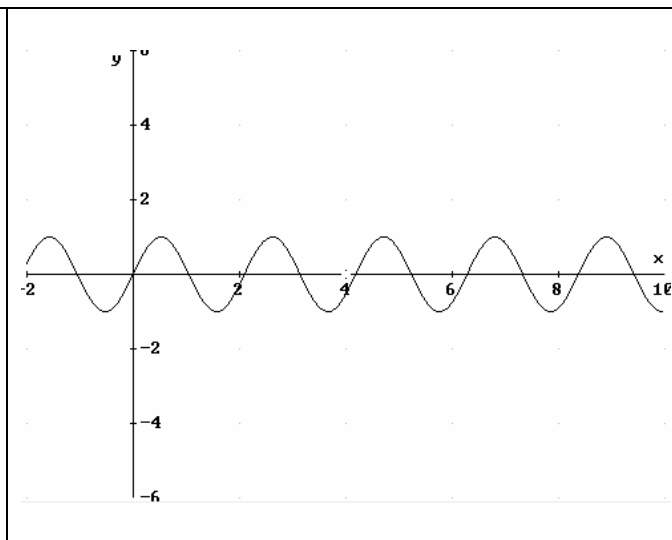
- contraendolo (*parallelamente all'asse x*), nel rapporto da 1 a $\frac{1}{k}$ se $k > 1$
- dilatandolo (*parallelamente all'asse x*), nel rapporto da 1 a $\frac{1}{k}$ se $0 < k < 1$

I punti di intersezione con l'asse y restano fissi.

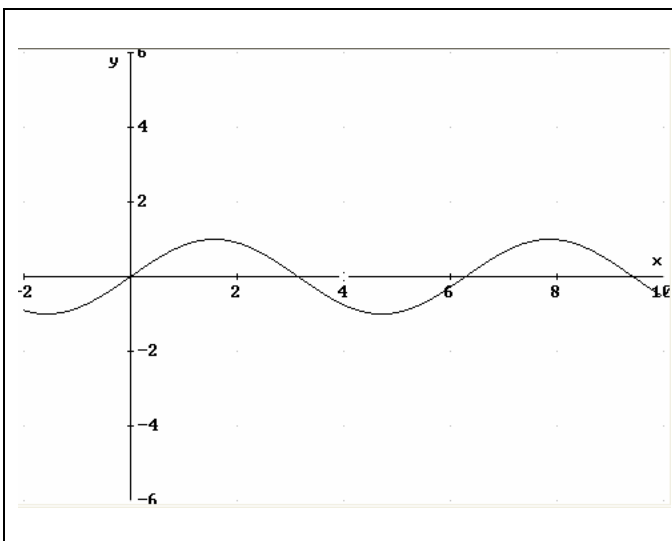
$\text{sen } x$



$\text{sen } 3x$



$\text{sen } x$



$\text{sen } \frac{1}{2}x$

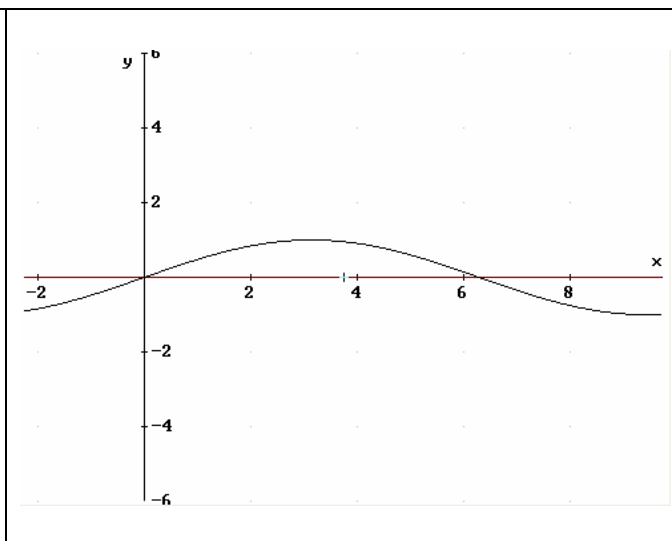


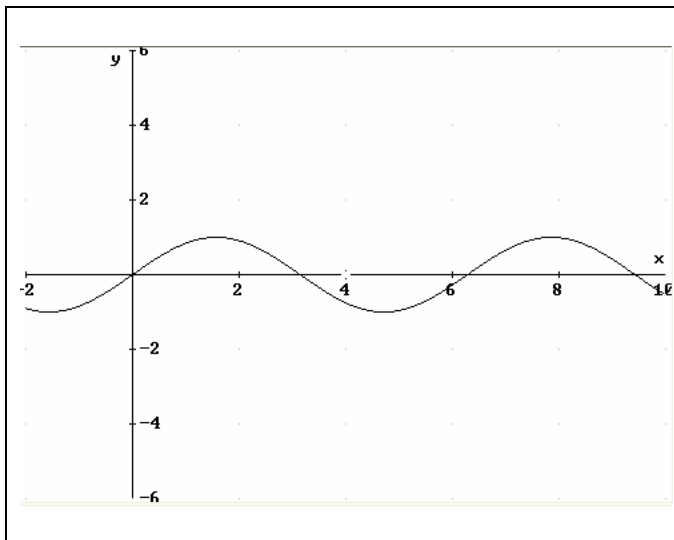
GRAFICO DILATATO (2) $y = k \cdot f(x)$

Il grafico della funzione $k \cdot f(x)$ si ottiene dal grafico della funzione $f(x)$:

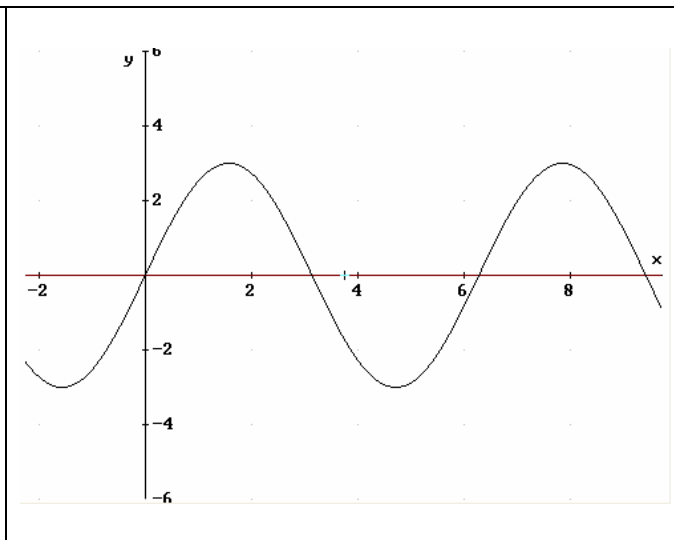
- dilatandolo (*parallelamente all'asse y*), nel rapporto da 1 a k se $k > 1$
- contraendolo (*parallelamente all'asse y*), nel rapporto da 1 a k se $0 < k < 1$

I punti di intersezione con l'asse x restano fissi.

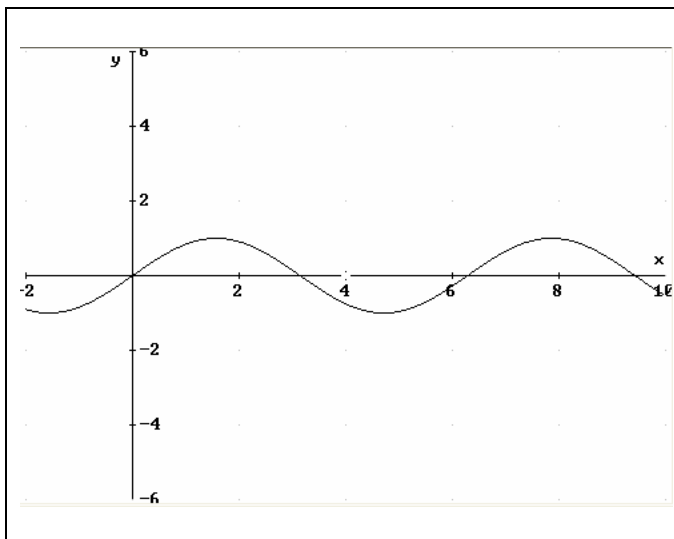
$\sin x$



$3 \cdot \sin x$



$\sin x$



$\frac{1}{2} \cdot \sin x$

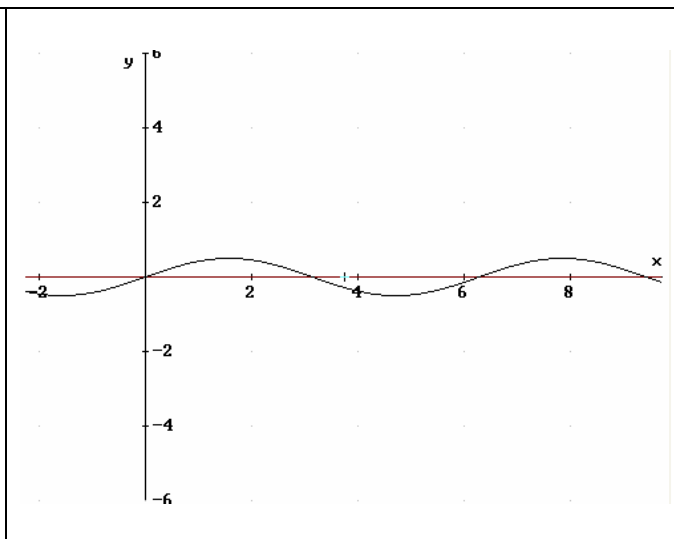
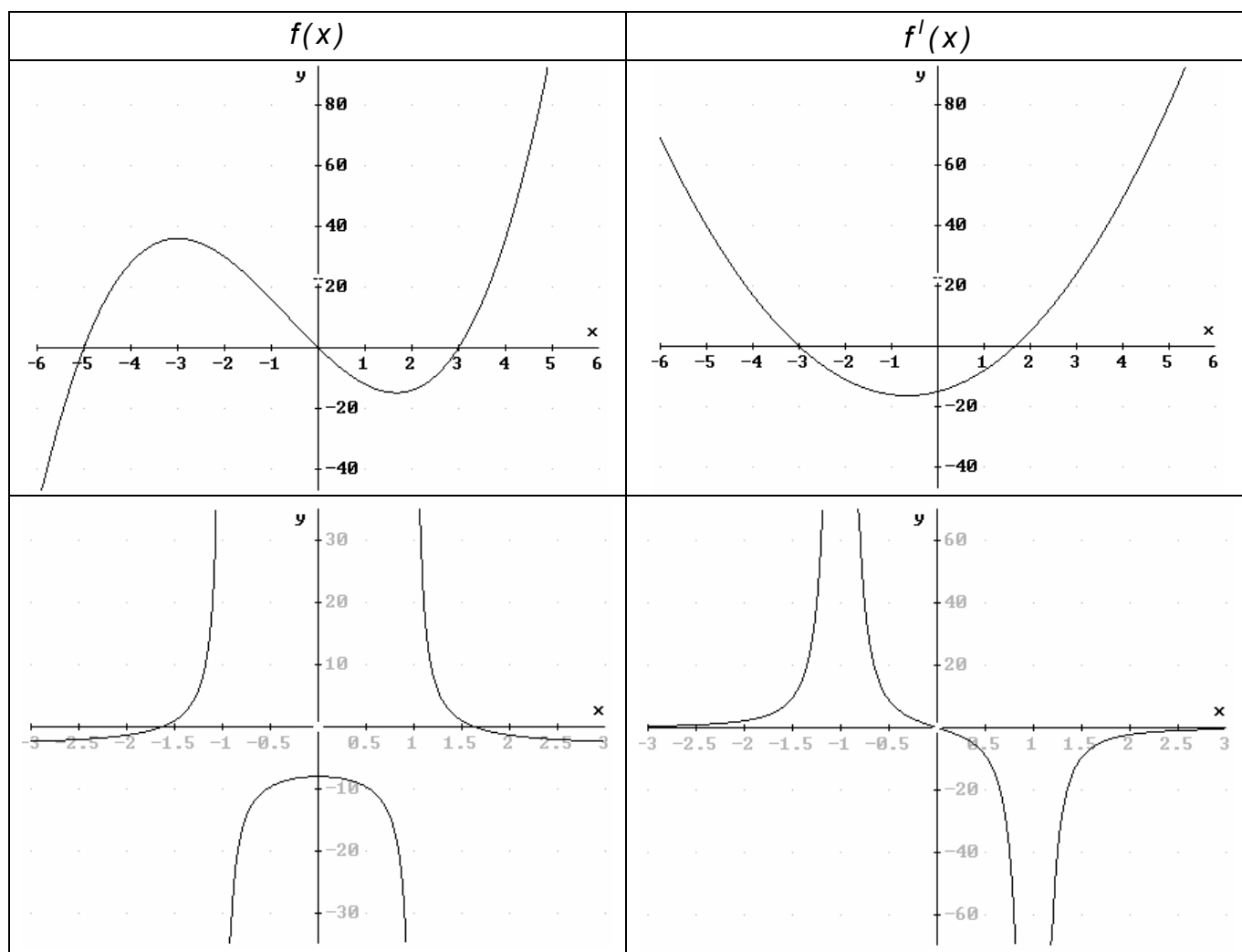


Grafico della funzione derivata $f'(x)$

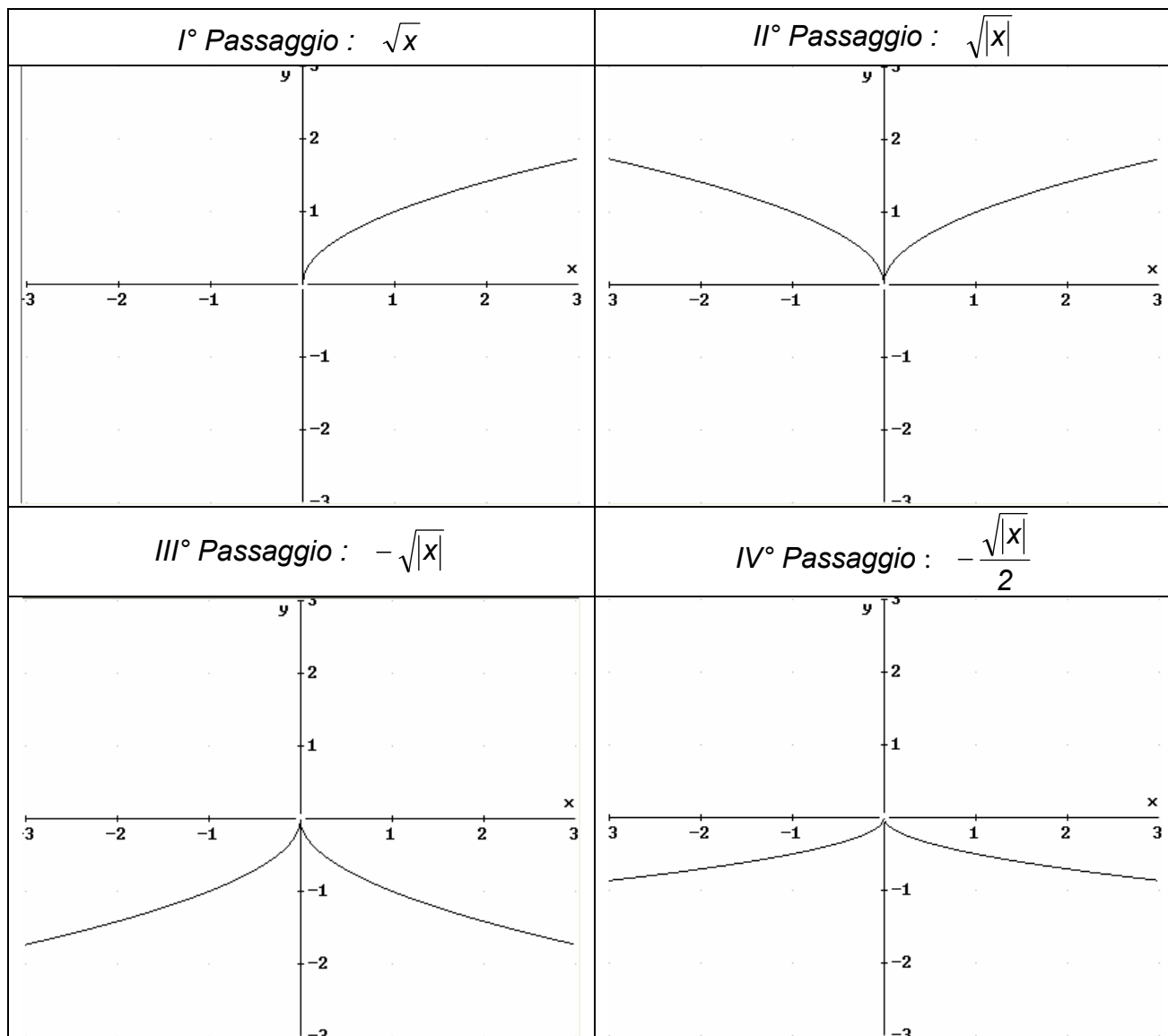
Il grafico della derivata $f'(x)$ si ottiene esaminando alcune caratteristiche della funzione $f(x)$:

- ✚ negli intervalli in cui la funzione $f(x)$ è crescente, la sua derivata $f'(x)$ è positiva e il valore della derivata sarà tanto maggiore quanto maggiore è la pendenza del grafico della funzione data
- ✚ negli intervalli in cui la funzione $f(x)$ è decrescente, la sua derivata $f'(x)$ è negativa e il valore della derivata sarà tanto maggiore quanto maggiore è la pendenza del grafico della funzione data
- ✚ nei punti in cui il grafico della funzione $f(x)$ ha tangente orizzontale (max, min e flessi a tangente orizzontale) la derivata prima $f'(x)$ tocca l'asse delle x
- ✚ negli intervalli in cui il grafico di $f(x)$ volge la concavità verso l'alto, la sua derivata $f'(x)$ è crescente
- ✚ negli intervalli in cui il grafico di $f(x)$ volge la concavità verso il basso, la sua derivata $f'(x)$ è decrescente
- ✚ nei punti di flesso del grafico di $f(x)$, la sua derivata $f'(x)$ ha un punto di max, o di min o un flesso a tangente orizzontale
- ✚ se la funzione $f(x)$ è pari, allora la sua derivata $f'(x)$ è dispari
- ✚ se la funzione $f(x)$ è dispari, allora la sua derivata $f'(x)$ è pari

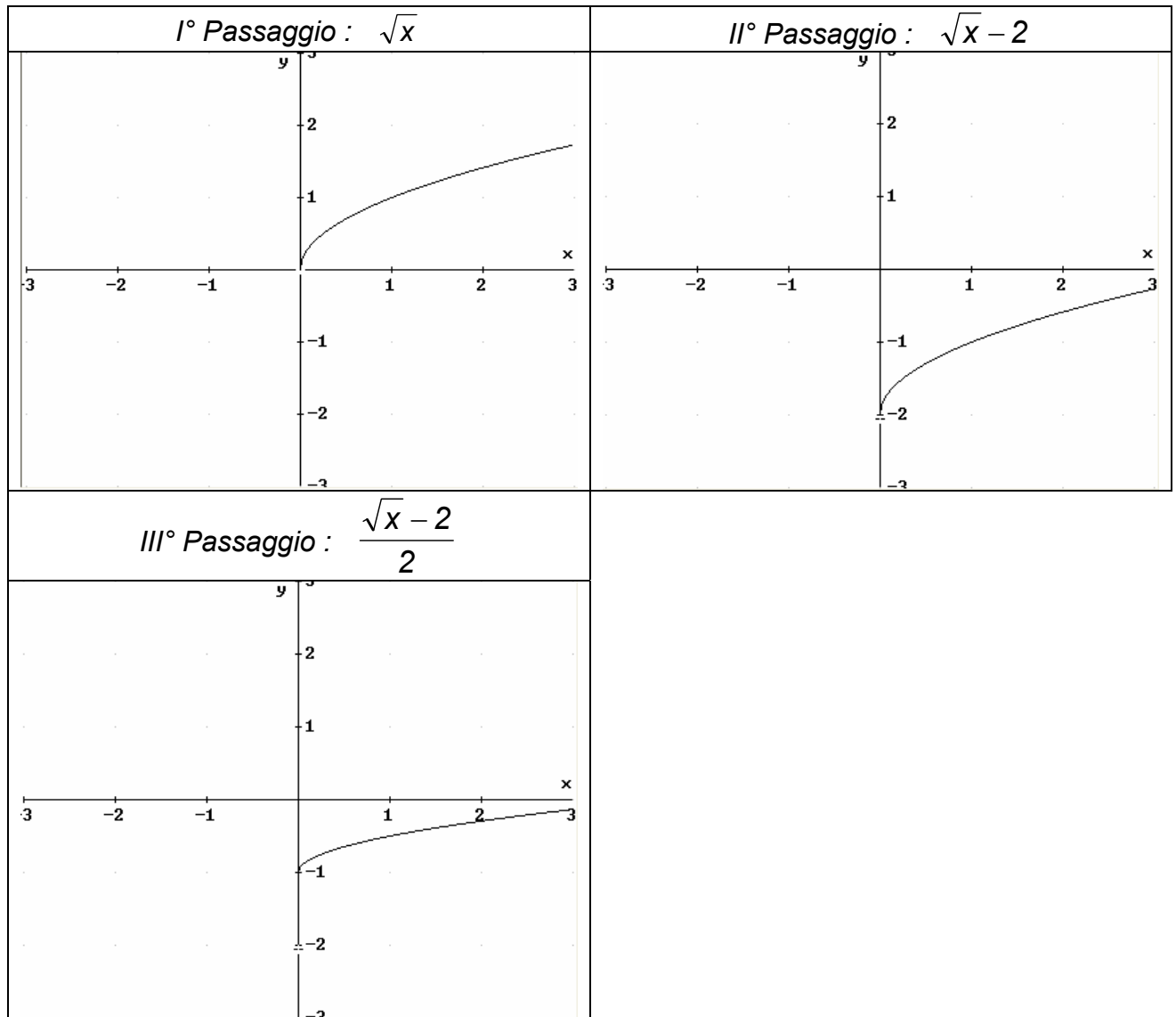


ESEMPI

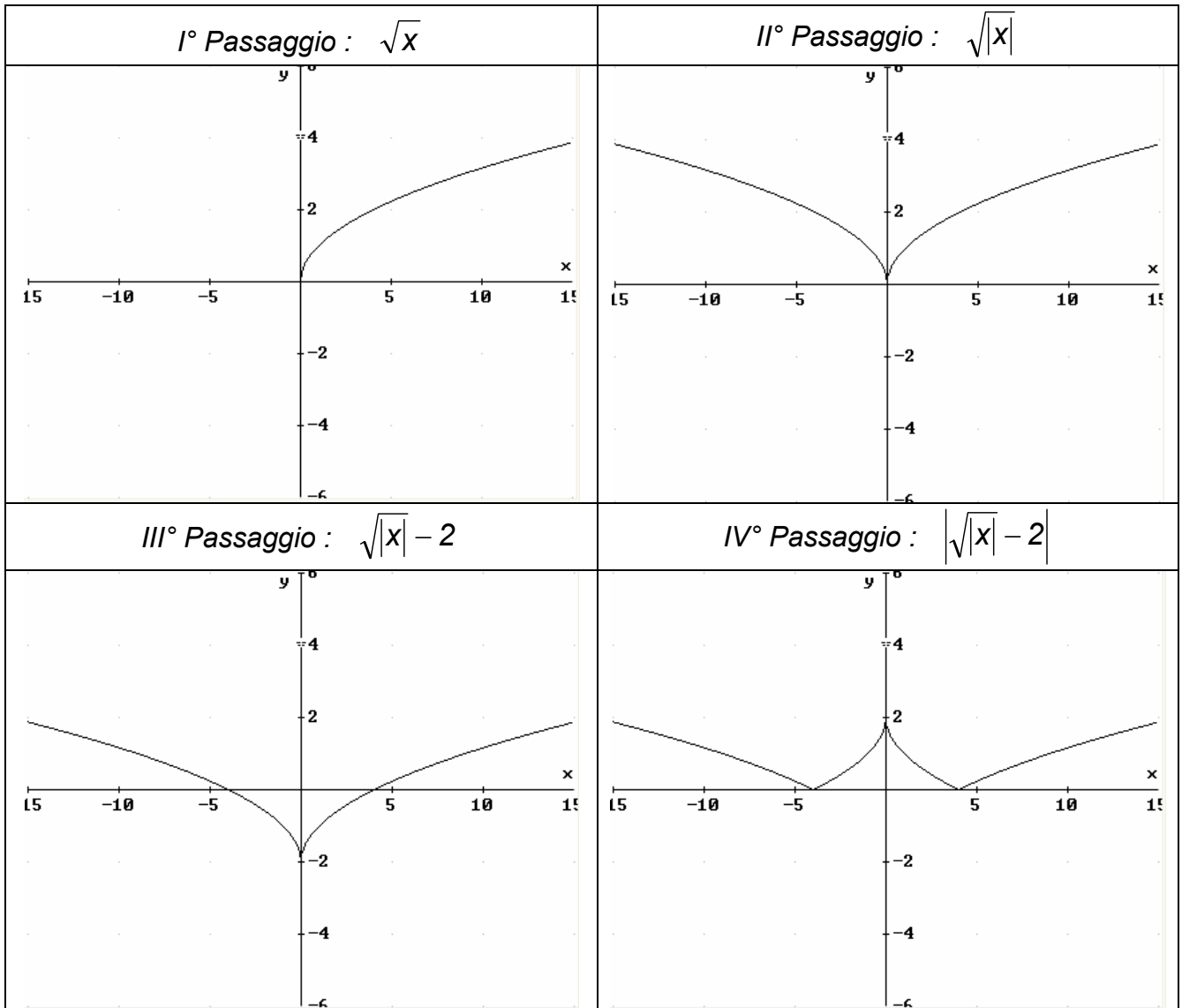
ESEMPIO 1 : $f(x) = -\frac{\sqrt{|x|}}{2}$



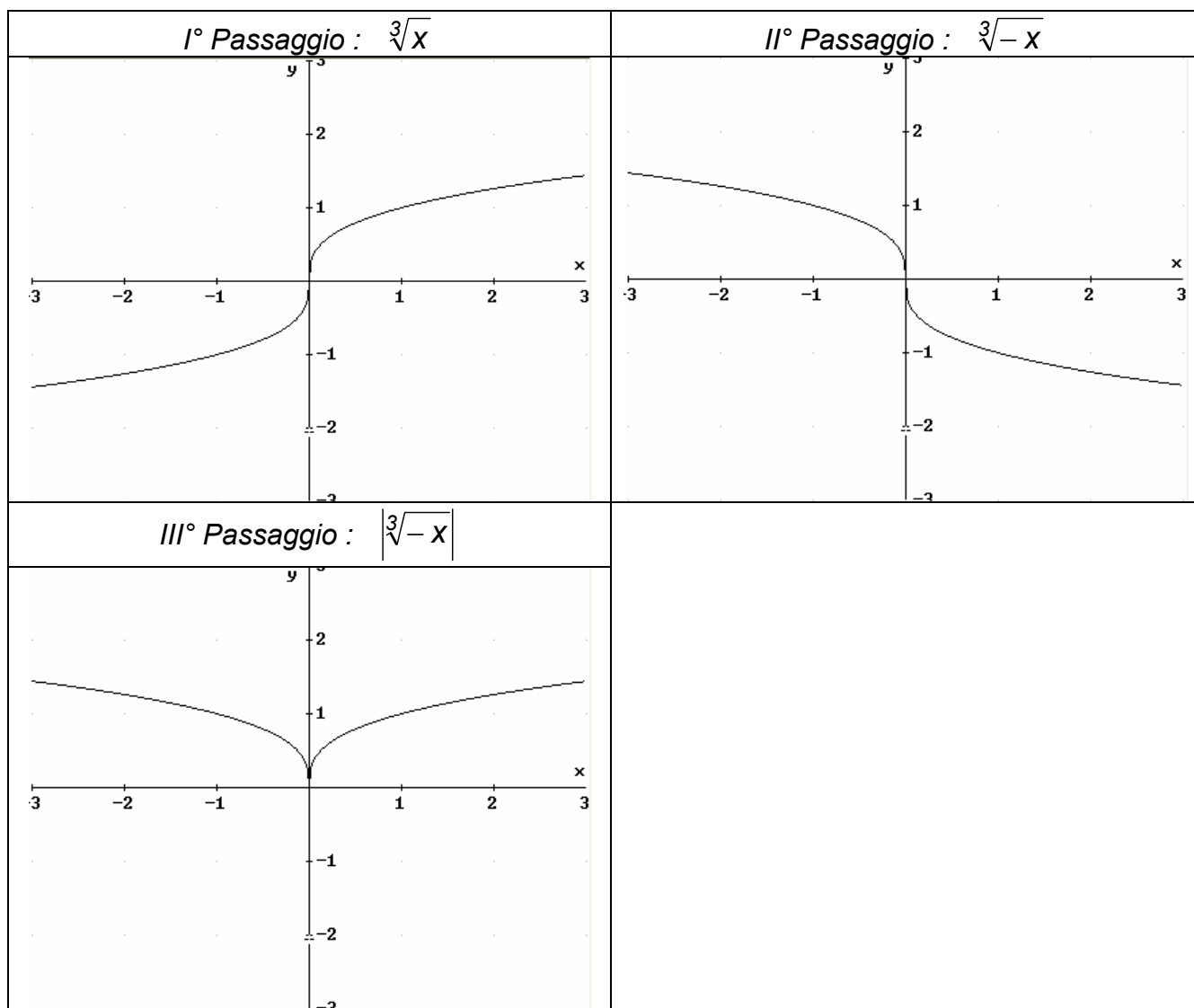
ESEMPIO 2 : $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{2}$



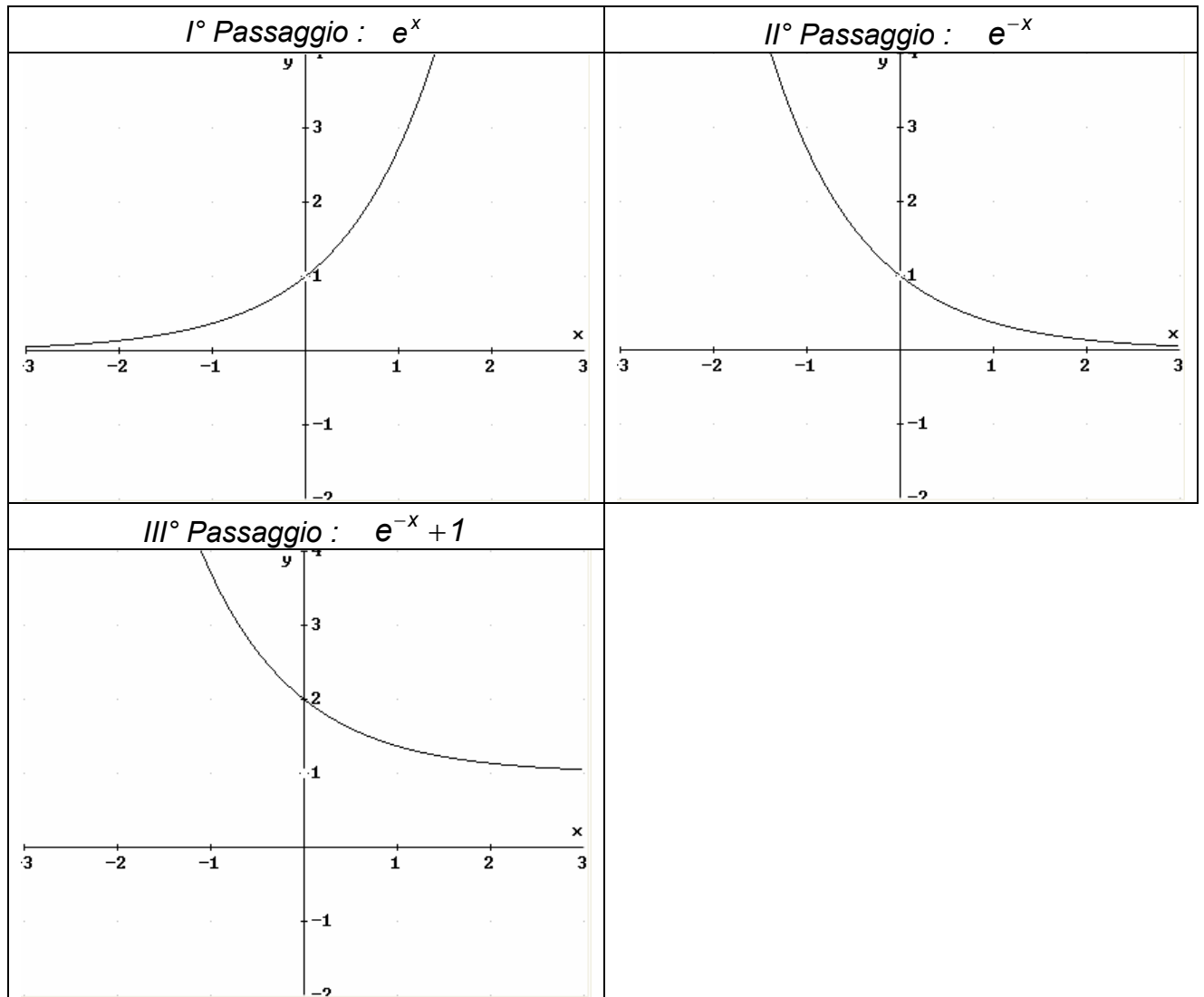
ESEMPIO 3 : $f(x) = \left| \sqrt{|x|} - 2 \right|$



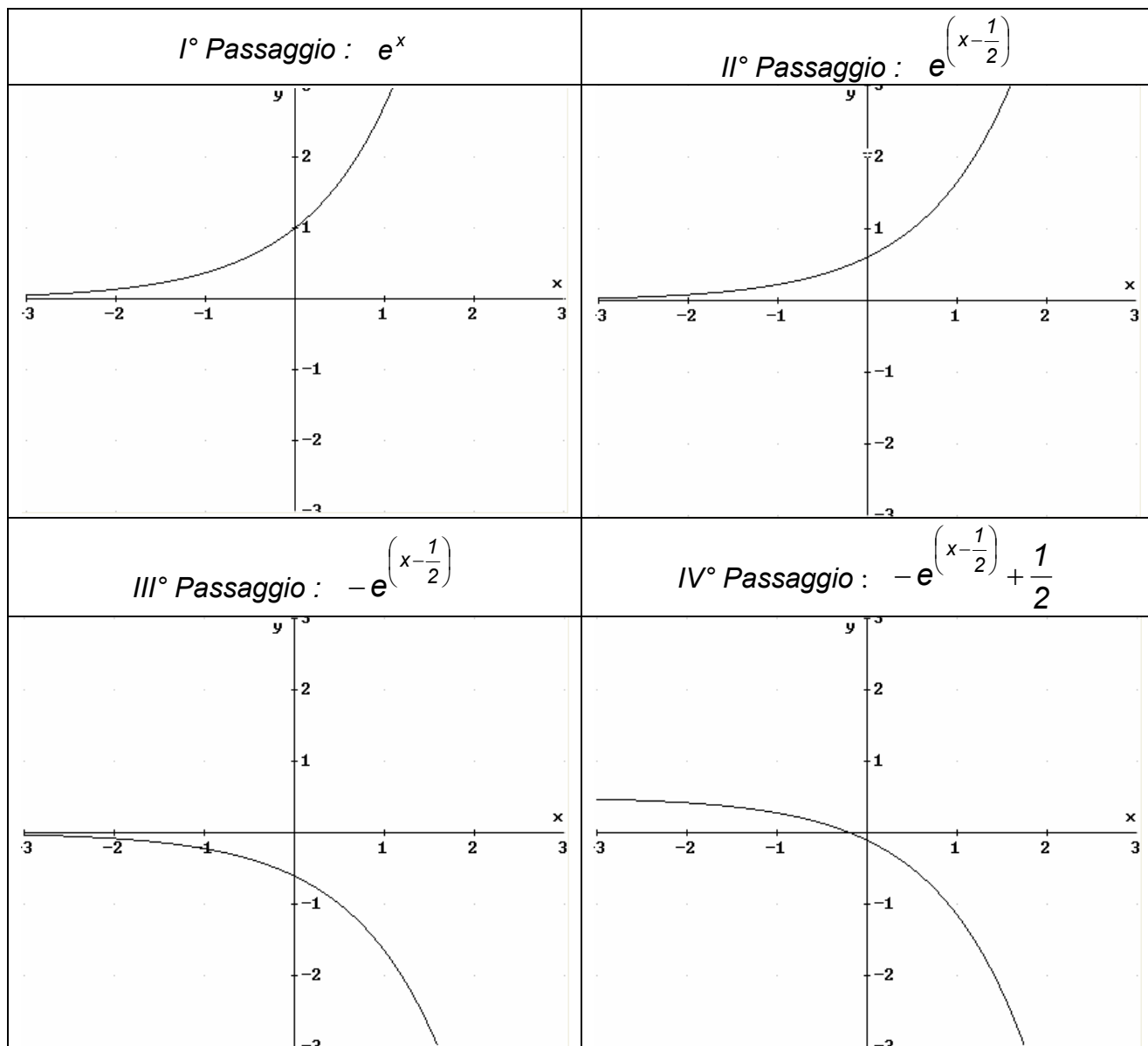
ESEMPIO 4 : $f(x) = \sqrt[3]{-x}$



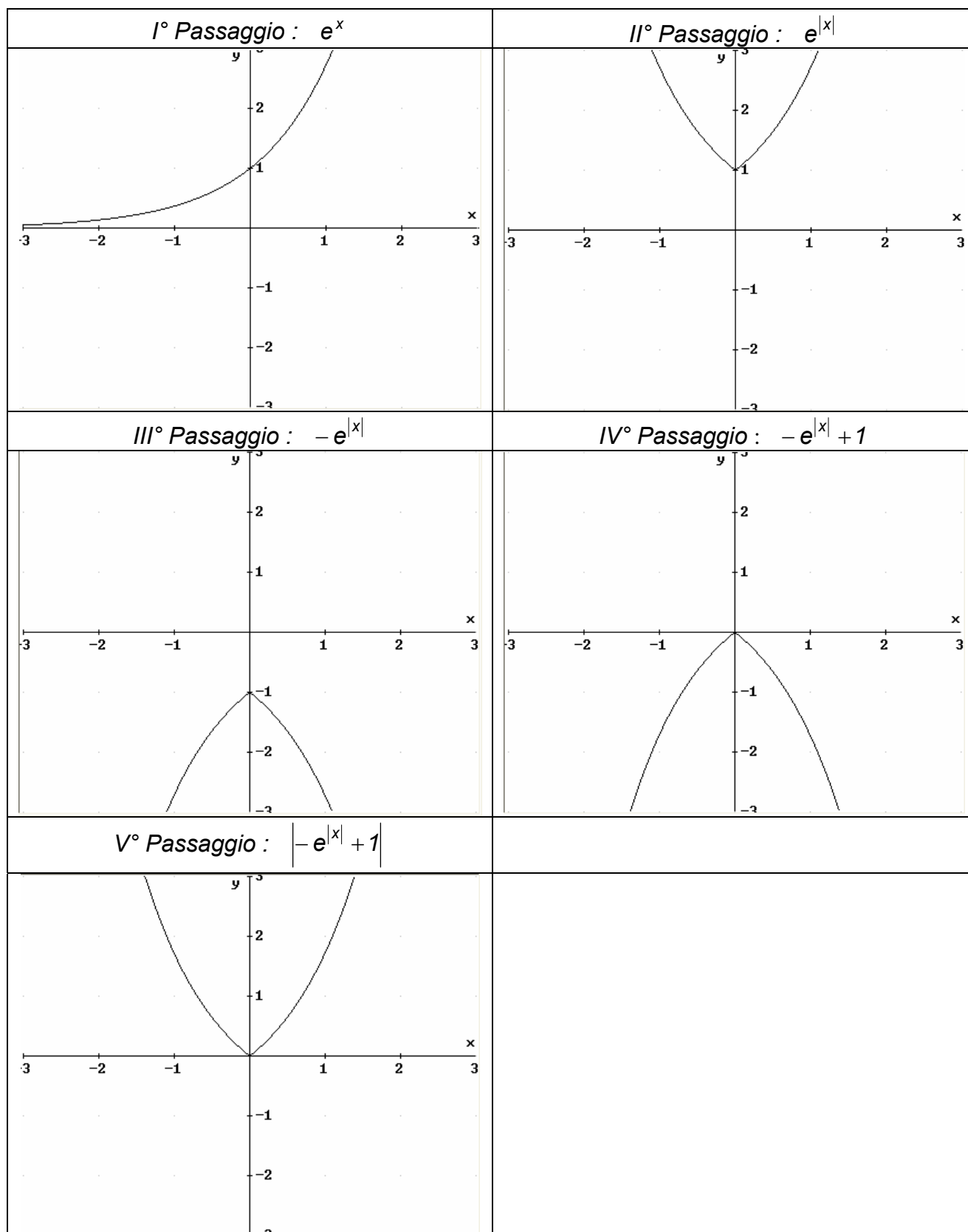
ESEMPIO 5 : $f(x) = e^{-x} + 1$



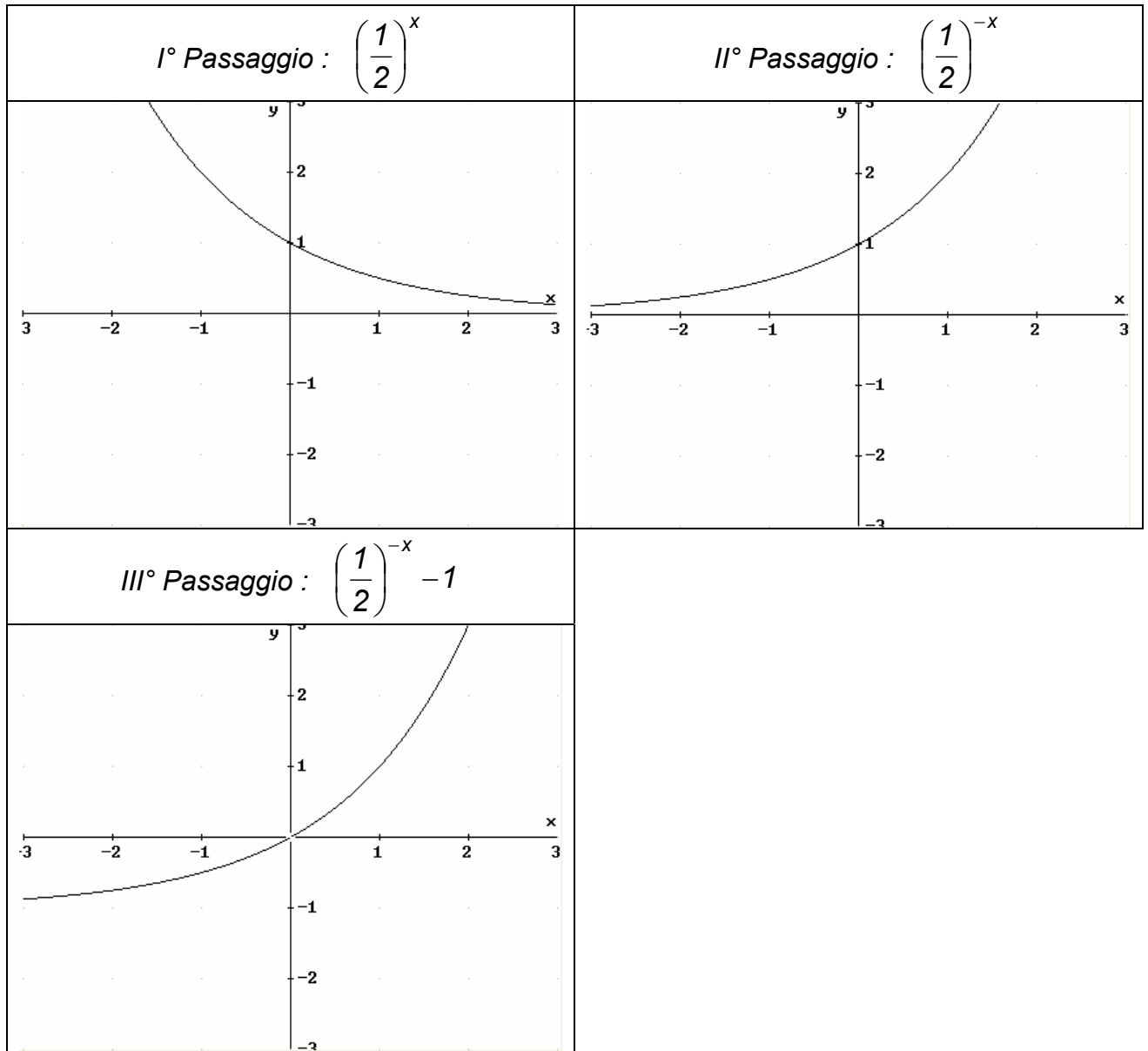
ESEMPIO 6 : $f(x) = -e^{\left(x-\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{2}$



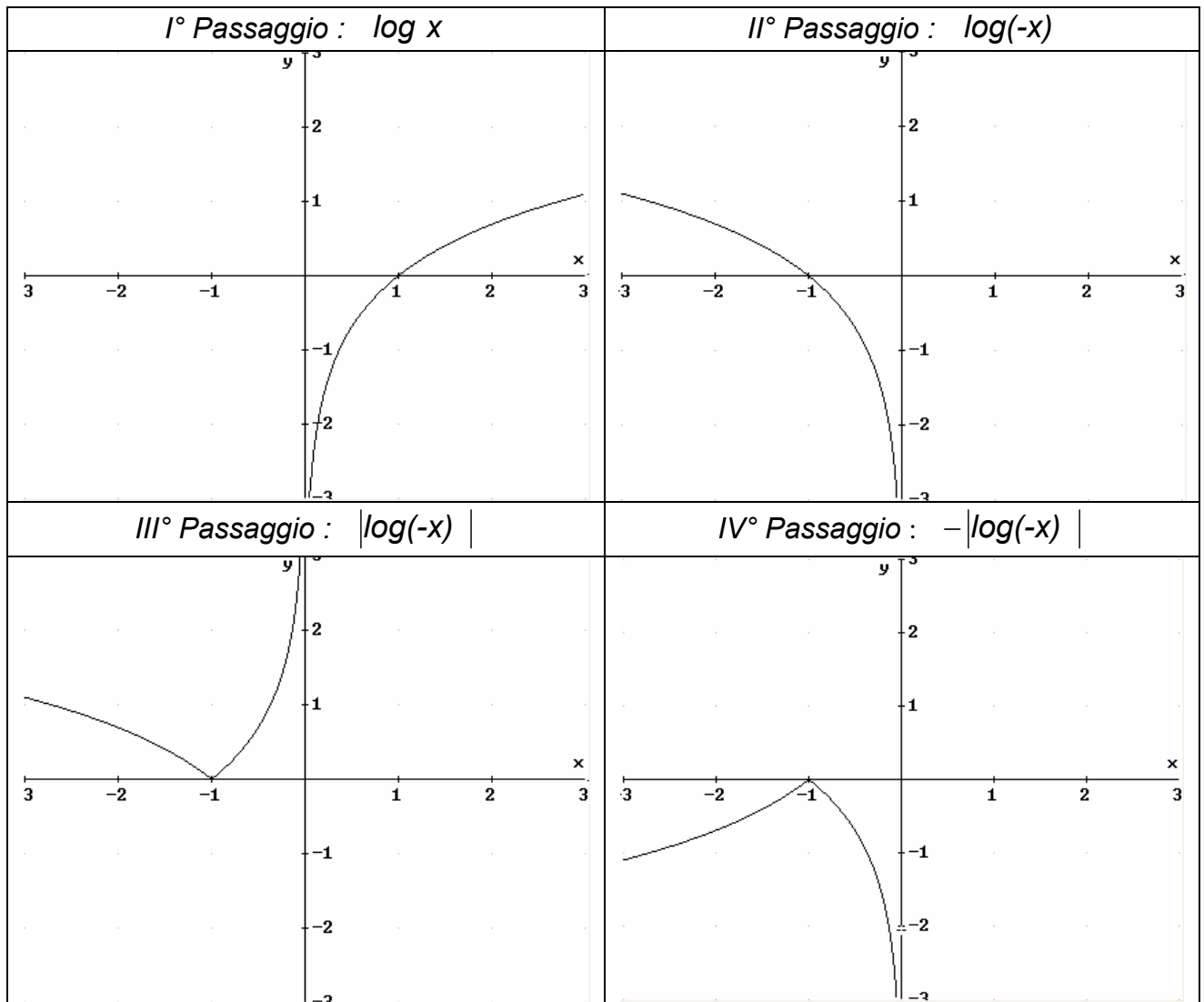
ESEMPIO 7: $f(x) = \left| -e^{|x|} + 1 \right|$



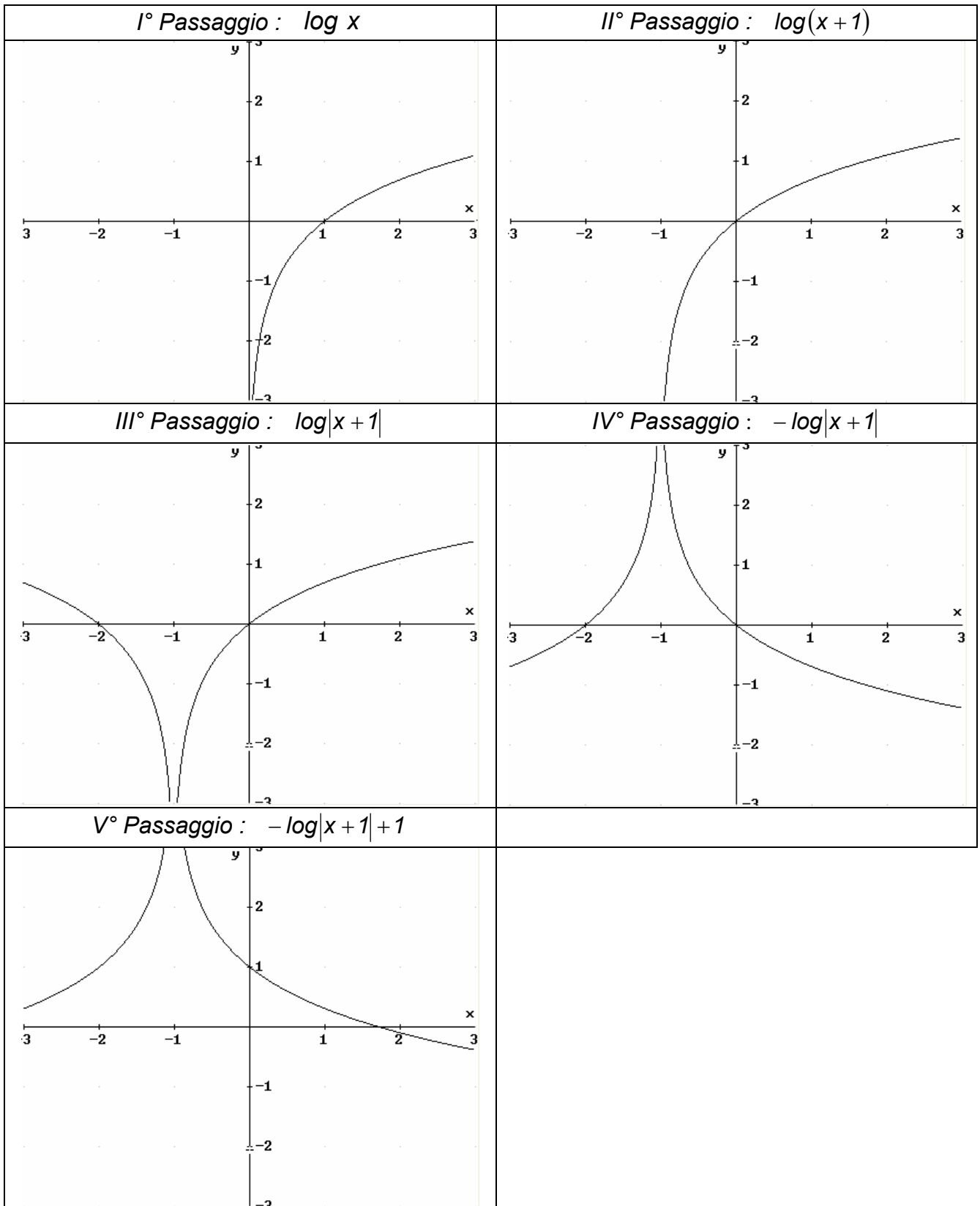
ESEMPIO 8 : $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} - 1$



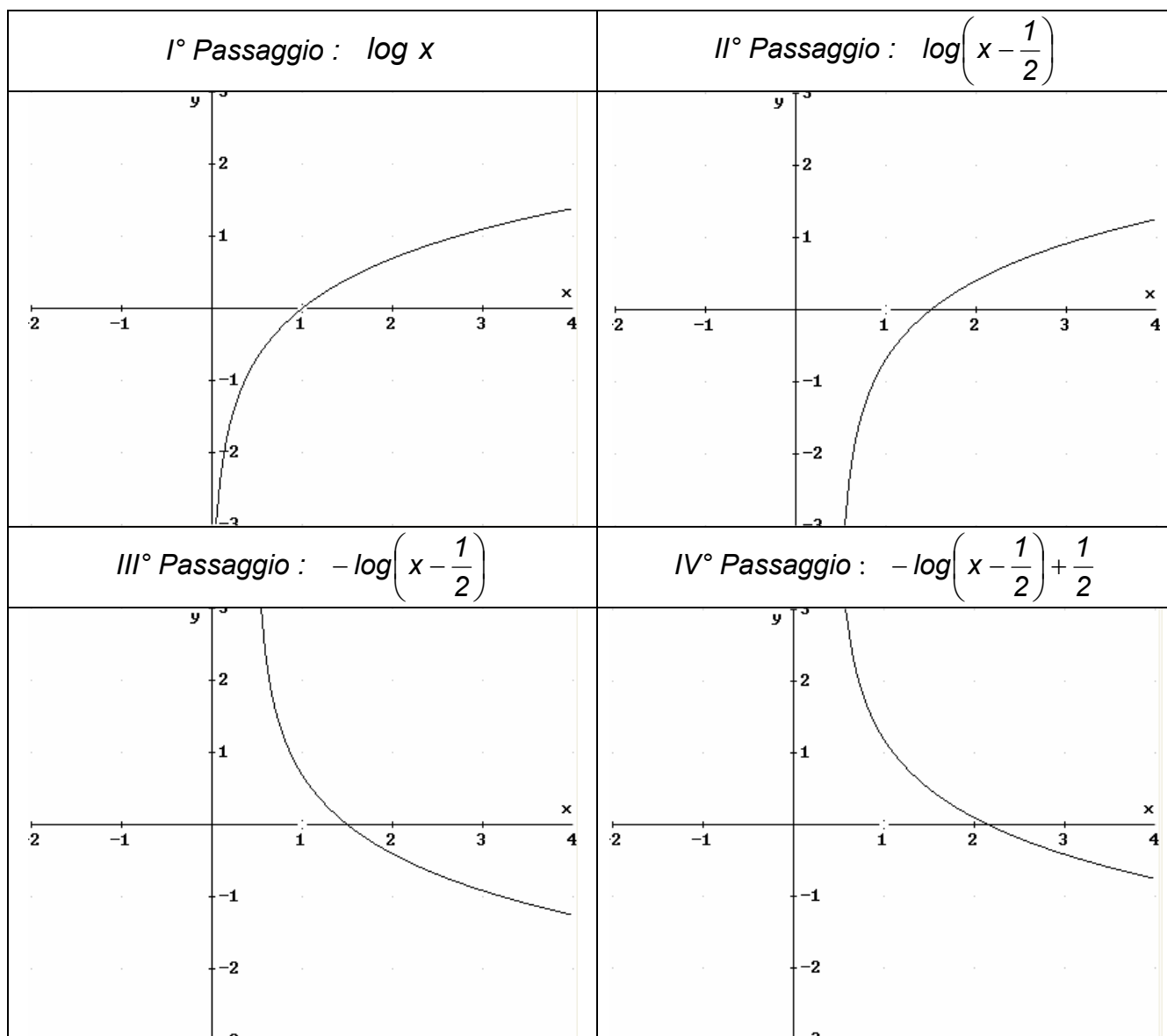
ESEMPIO 9 : $f(x) = -|\log(-x)|$



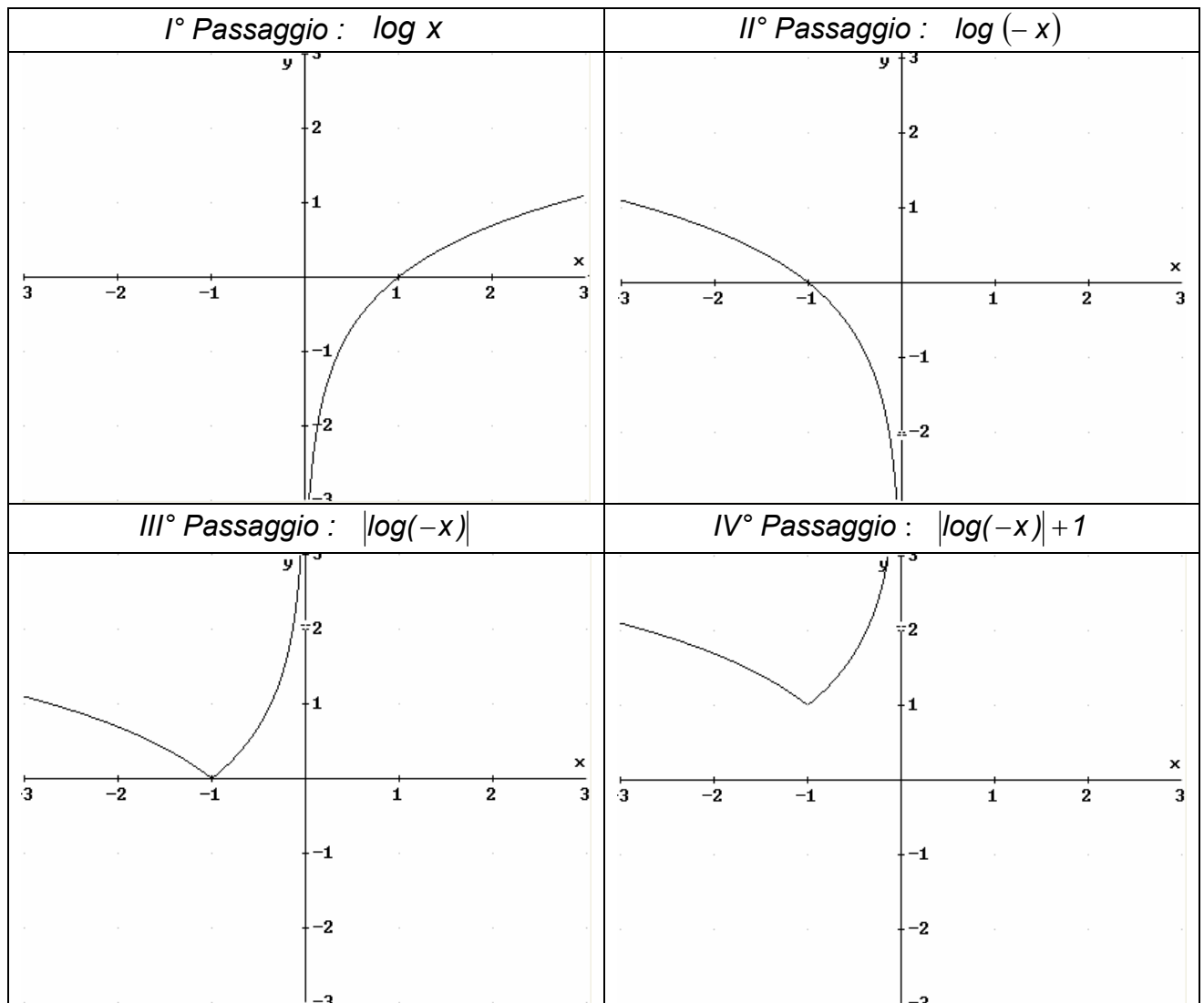
ESEMPIO 10 : $f(x) = 1 - \log|x+1|$



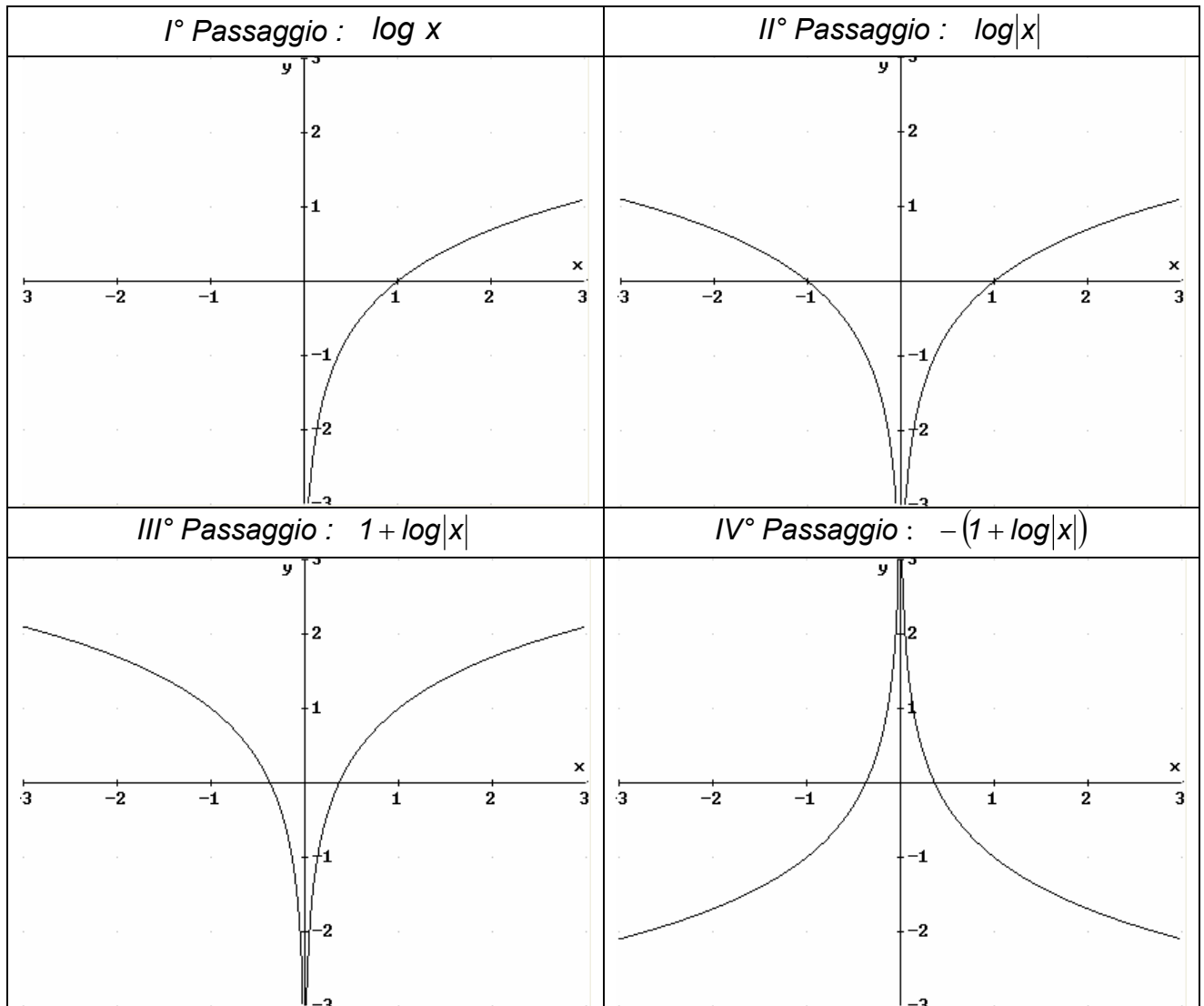
ESEMPIO 11 : $f(x) = \frac{1}{2} - \log\left(x - \frac{1}{2}\right)$



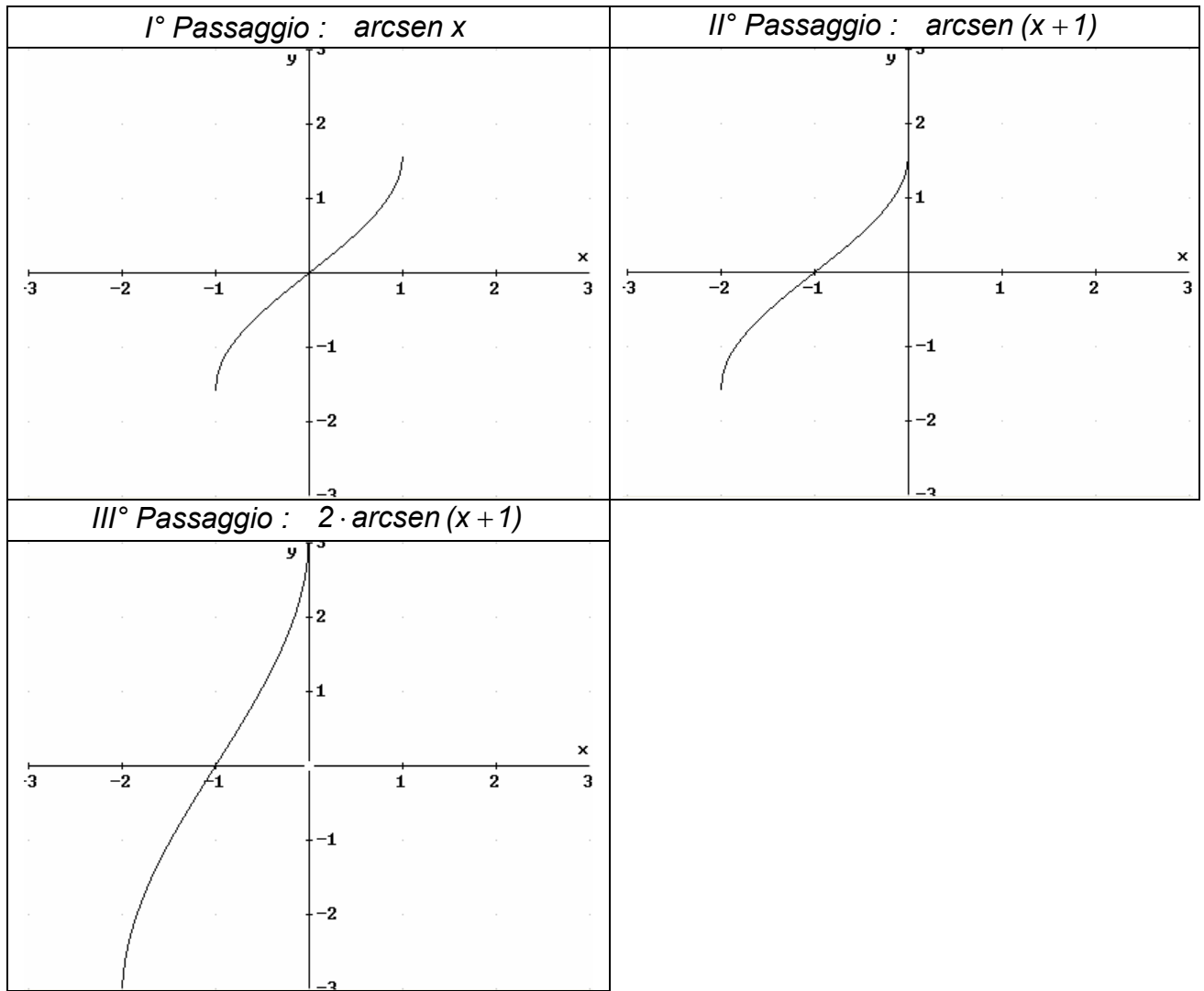
ESEMPIO 12 : $f(x) = |\log(-x)| + 1$



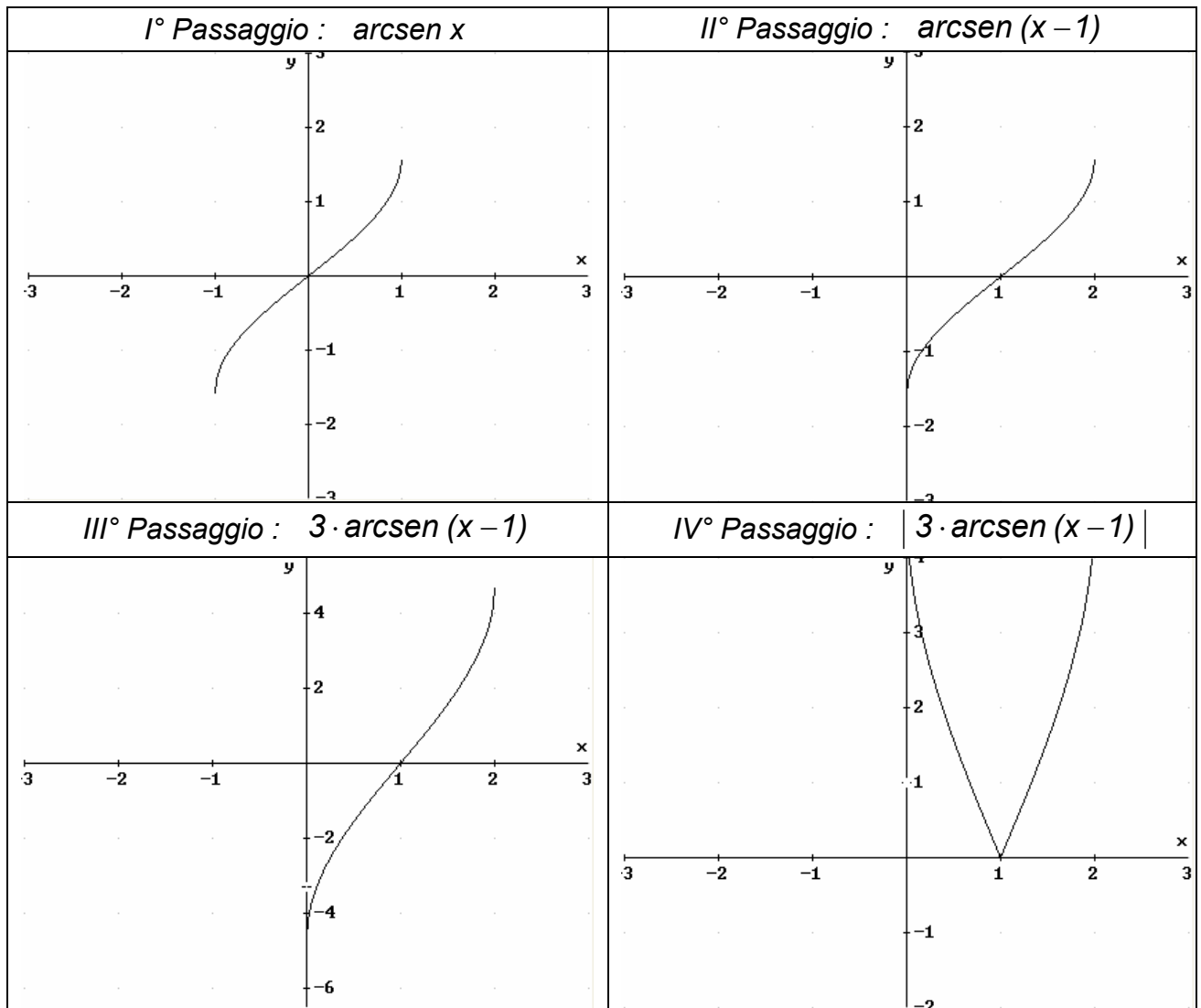
ESEMPIO 13 : $f(x) = -(1 + \log|x|)$



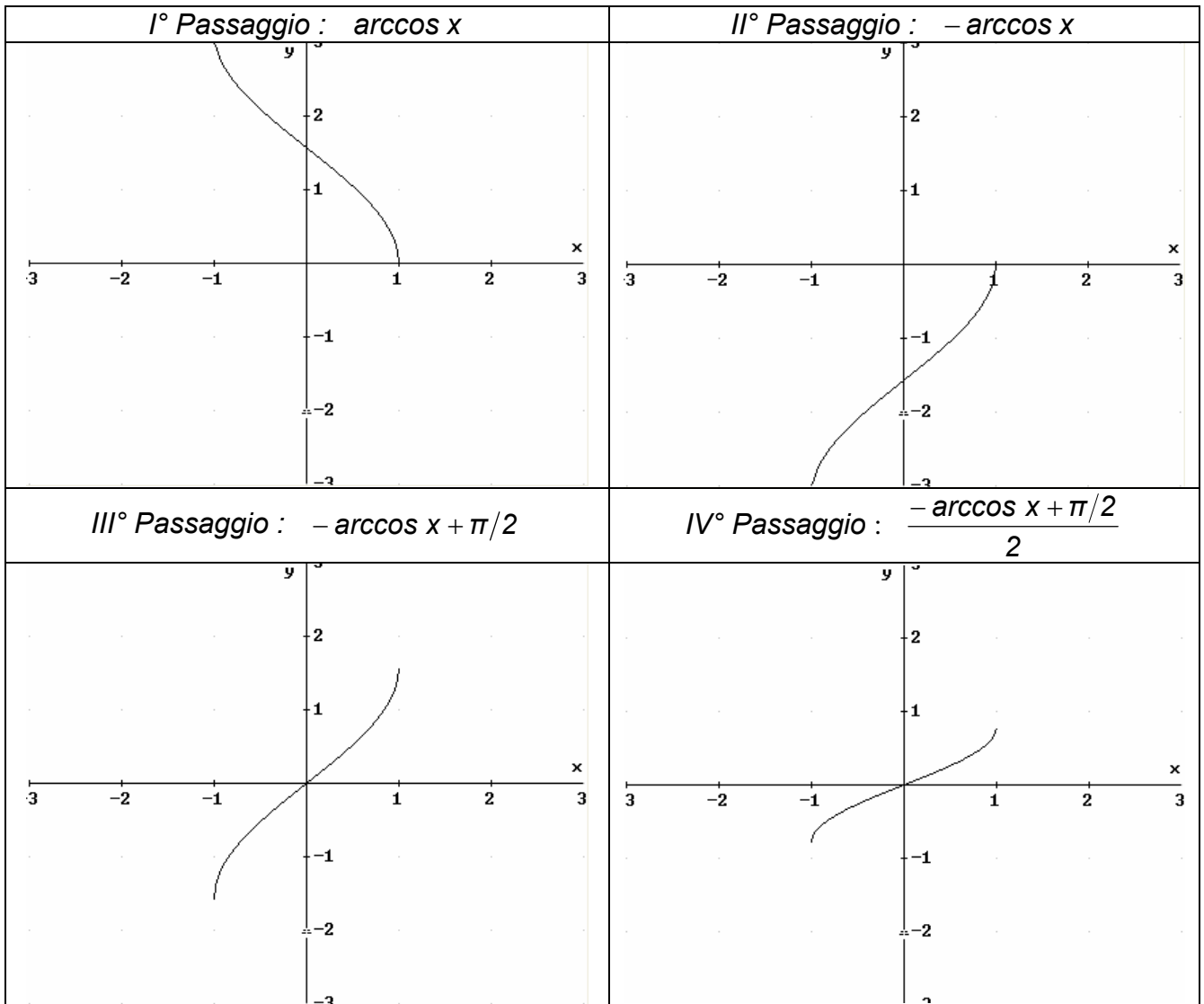
ESEMPIO 14 : $f(x) = 2 \cdot \arcsen(x+1)$



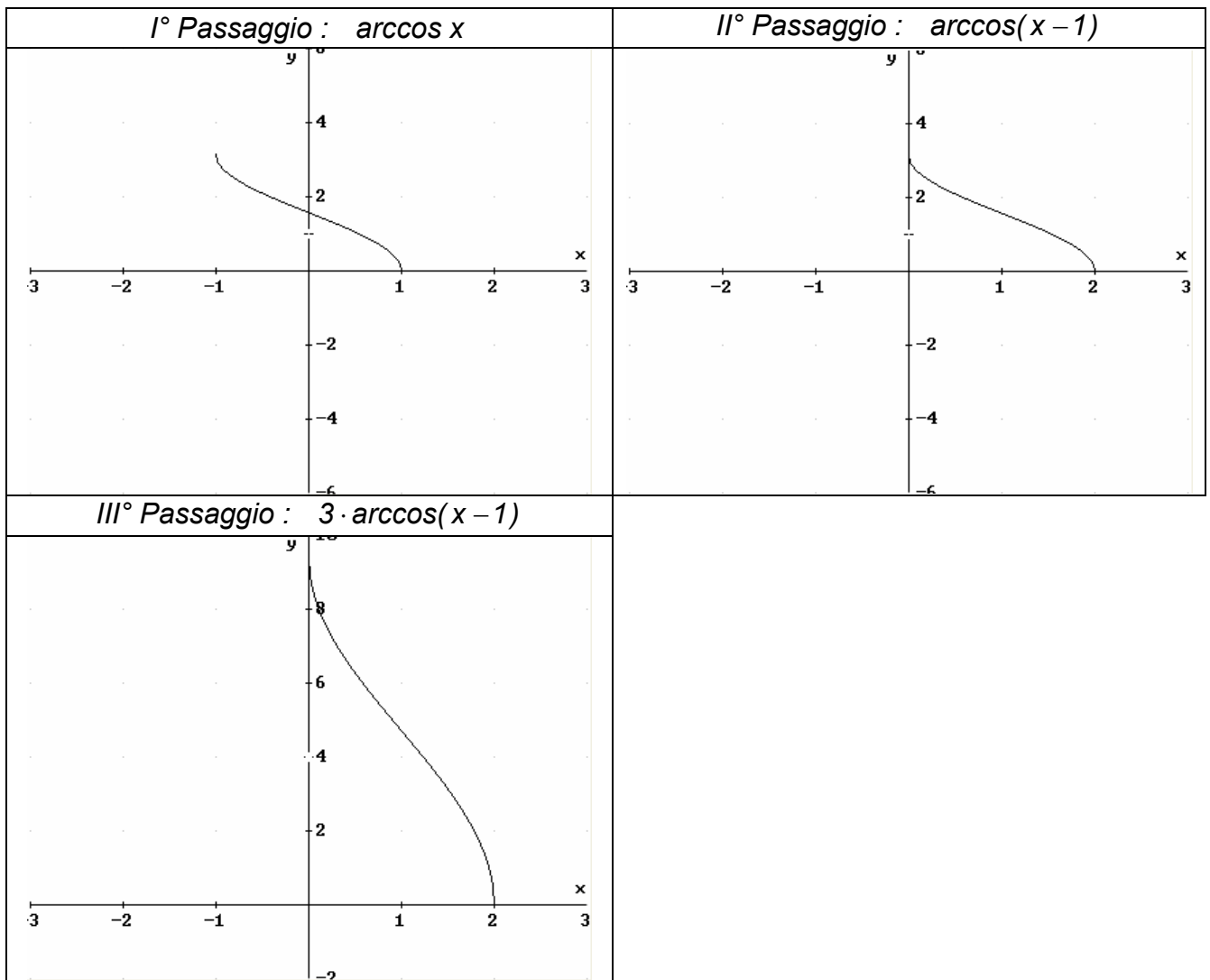
ESEMPIO 15 : $f(x) = |3 \cdot \arcsen(x-1)|$



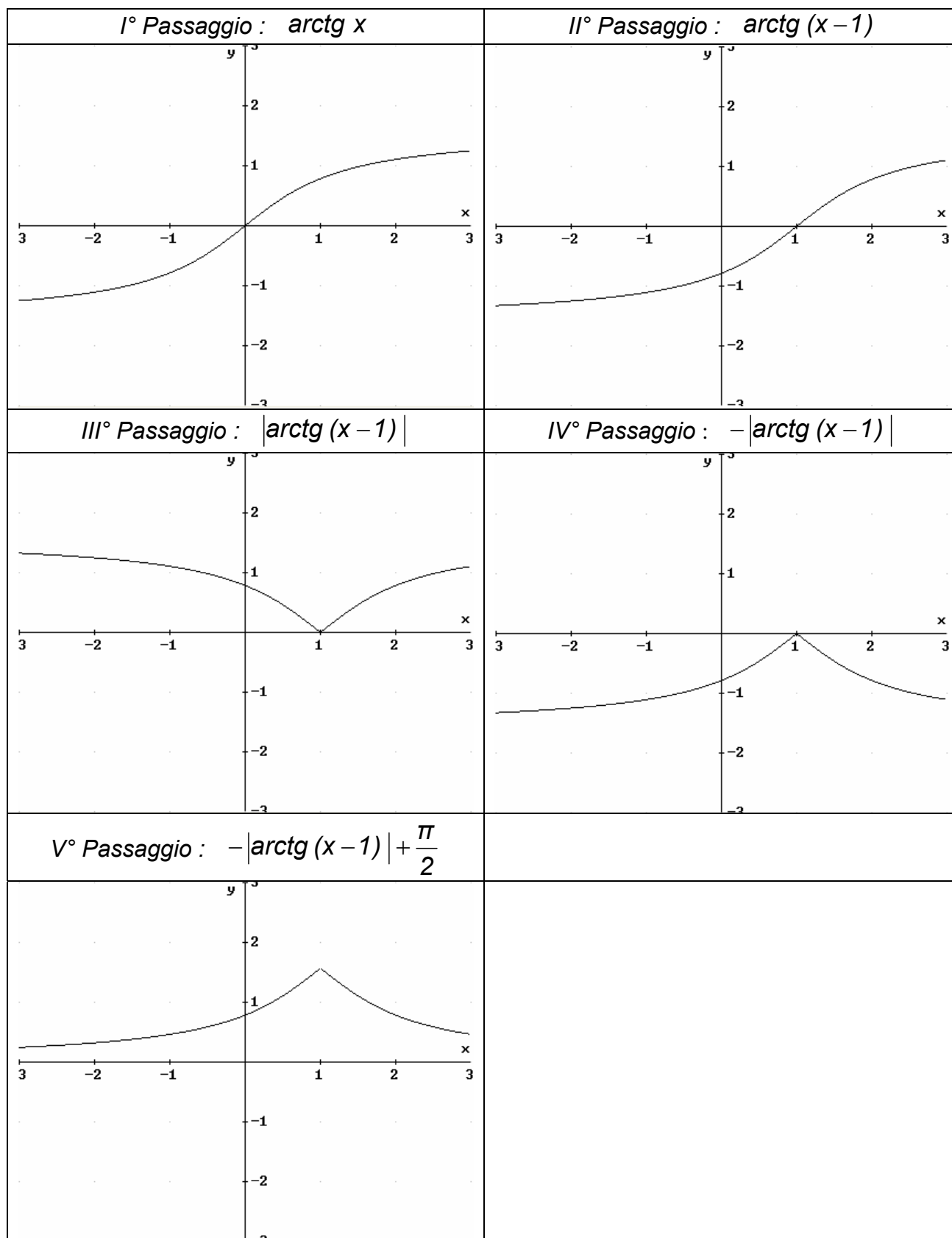
ESEMPIO 16 : $f(x) = \frac{-\arccos x + \pi/2}{2}$



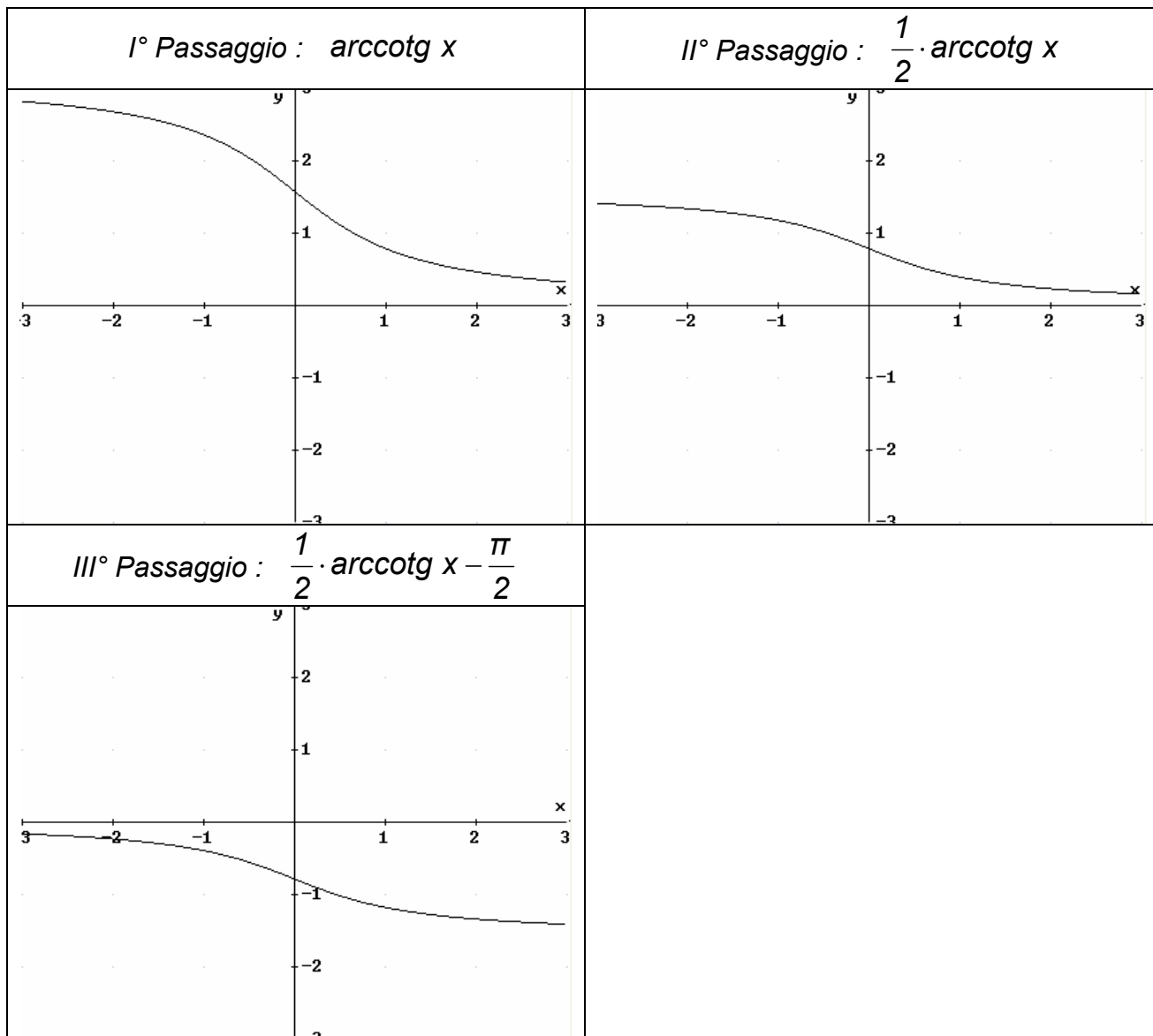
ESEMPIO 17 : $f(x) = 3 \cdot \arccos(x - 1)$



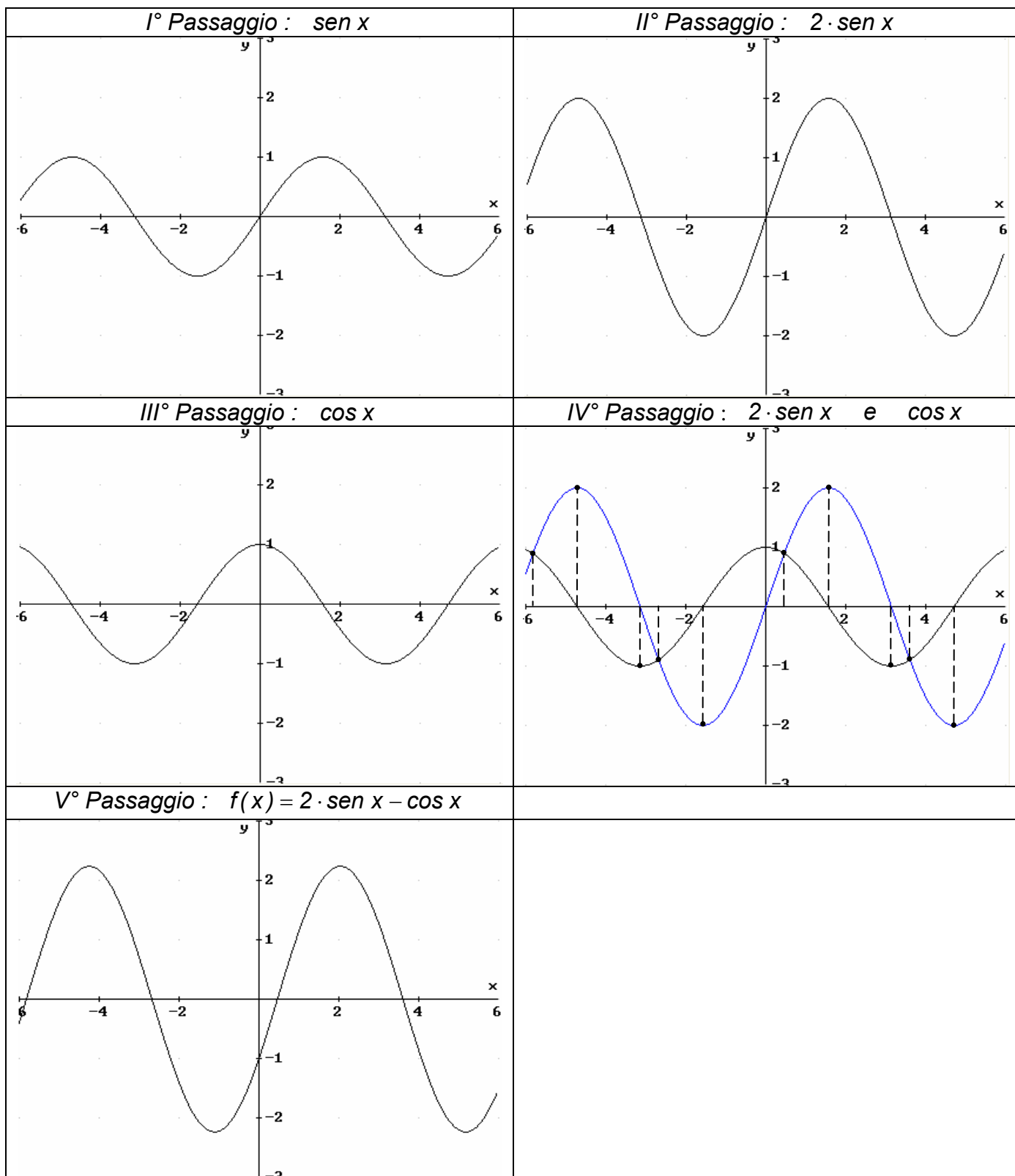
ESEMPIO 18 : $f(x) = \frac{\pi}{2} - |\arctg(x-1)|$



ESEMPIO 19 : $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arccotg} x - \frac{\pi}{2}$



ESEMPIO 20 : $f(x) = 2 \cdot \text{sen } x - \text{cos } x$



Esercizi da svolgere

Tracciare i grafici delle funzioni:

$$y = (x+2)^2 ; \quad y = (x+2)^3 + 1 ; \quad y = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) ; \quad y = \ln(x+2) ;$$

$$y = e^{x+2} - 1 ; \quad \log_{\frac{1}{a}} x \text{ (con } a > 1) ; \quad y = \sqrt{x+1} ; \quad y = 2^{x-2} + 1 ;$$

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) ; \quad y = \frac{1}{1-x} ; \quad y = 2\sqrt{3x} ; \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{x} ;$$

$$y = \sqrt{2x+1} ; \quad y = e^{|x|+1} ; \quad y = (x-1)^3 - 2 ; \quad y = \ln(x-3) + 1 ;$$

$$y = e^{|x|-1} ; \quad y = \left|\sin x + \frac{1}{2}\right| ; \quad y = |\ln|x| + 1| ; \quad y = |e^{|x|} - 2| ;$$