Studio del grafico della funzione: $\boxed{f(x)=\dfrac{5\cos x}{1+2\cos x}}$

1. <u>Dominio</u>

   $f(x)$ è una funzione goniometrica fratta. Essa è definita e continua in $D_f=\left\{x\in R \mid x\neq\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi;\ k\in Z\right\}$.

   Infatti occorre che sia: $1+2\cos x\neq 0$; $\quad \cos x\neq-\frac{1}{2}$; $\quad x\neq\frac{2}{3}\pi$.

2. <u>Simmetrie e periodicità</u>

   $f(x)$ è pari, cioè simmetrica rispetto all'asse y.

   Infatti: $f(-x)=\dfrac{5\cos(-x)}{1+2\cos(-x)}=\dfrac{5\cos x}{1+2\cos x}=f(x)$.

   Ricordando che la funzione $\cos hx$ è periodica di periodo $\frac{2\pi}{h}$, si ha inoltre che $f(x)$ è periodica di periodo 2π.

   Pertanto è sufficiente limitarne lo studi ad un intervallo di ampiezza 2π, ad esempio all'intervallo $L=[0,2\pi]$.

   Il dominio della funzione limitato all'intervallo L è: $\overline{D}_f=\left[0,\frac{2}{3}\pi\right[\cup\left]\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi\right[\cup\left]\frac{4}{3}\pi,2\pi\right]$.

3. <u>Intersezioni con gli assi cartesiani</u>

   $f(x)$ interseca gli assi cartesiani in $A\left(0;\frac{5}{3}\right)$, $B\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ e $C\left(\frac{3}{2}\pi;0\right)$. Infatti:

   $$\begin{cases}y=\dfrac{5\cos x}{1+2\cos x}\\ x=0\end{cases}\qquad\begin{cases}y=\dfrac{5\cos 0}{1+2\cos 0}=\dfrac{5}{3}\\ x=0\end{cases}\qquad\begin{cases}y=\dfrac{5}{3}\\ x=0\end{cases}$$

   $$\begin{cases}y=\dfrac{5\cos x}{1+2\cos x}\\ y=0\end{cases}\qquad\begin{cases}0=\dfrac{5\cos x}{1+2\cos x}\\ y=0\end{cases}\qquad\begin{cases}5\cos x=0\\ y=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ y=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\left\langle\begin{array}{l}x_1=\dfrac{\pi}{2}\\ x_2=\dfrac{3}{2}\pi\end{array}\right.\\ y=0\end{cases}$$

   La funzione al II° estremo 2π assume di nuovo il valore: $f(2\pi)=\frac{5}{3}$.

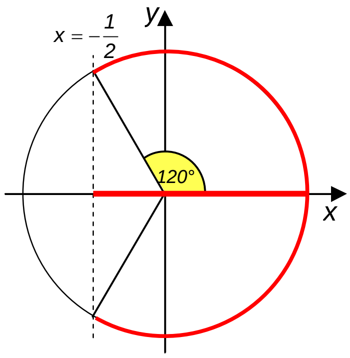
4. <u>Segno di f (x)</u>

   $f(x)>0$ in $0<x<\frac{\pi}{2};\ \frac{2}{3}\pi<x<\frac{4}{3}\pi;\ \frac{3}{2}\pi<x<2\pi$

   $f(x)<0$ in $\frac{\pi}{2}<x<\frac{2}{3}\pi;\ \frac{4}{3}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$

   Infatti:

   $$\frac{5\cos x}{1+2\cos x}>0;\qquad \begin{array}{l}5\cos x>0\\ 1+2\cos x>0\end{array}\qquad \begin{array}{l}\cos x>0\\ \cos x>-\dfrac{1}{2}\end{array}\qquad \begin{array}{l}0<x<\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3}{2}\pi<x<2\pi\\ 0<x<\dfrac{2}{3}\pi;\ \dfrac{4}{3}\pi<x<2\pi\end{array}$$



   Graficamente si ottiene:

0 — $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ — $\frac{2}{3}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$ — $\frac{4}{3}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$ — $\frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$ — 2π
+	−	−	−	+
+	+	−	+	+
+	−	+	−	+

5. Limiti ed asintoti

$$\lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\pi\right)^-} \frac{\overset{\nearrow -\frac{5}{2}}{5\cos x}}{\underset{\searrow 0^+}{1+2\cos x}} = -\infty \qquad \lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\pi\right)^+} \frac{\overset{\nearrow -\frac{5}{2}}{5\cos x}}{\underset{\searrow 0^-}{1+2\cos x}} = +\infty \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{2}{3}\pi \text{ è un asintoto verticale.}$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{4}{3}\pi\right)^-} \frac{\overset{\nearrow -\frac{5}{2}}{5\cos x}}{\underset{\searrow 0^-}{1+2\cos x}} = +\infty \qquad \lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\pi\right)^+} \frac{\overset{\nearrow -\frac{5}{2}}{5\cos x}}{\underset{\searrow 0^+}{1+2\cos x}} = -\infty \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{4}{3}\pi \text{ è un asintoto verticale.}$$

Trattandosi di una funzione periodica, $f(x)$ non ha asintoti orizzontali ed obliqui.

6. Derivata prima

$$f'(x)=5\cdot\frac{-sen\,x\cdot(1+2\cos x)-\cos x\cdot(-2sen\,x)}{(1+2\cos x)^2}=5\cdot\frac{-sen\,x-2\cdot sen\,x\cdot\cos x+2\cdot sen\,x\cdot\cos x}{(1+2\cos x)^2}=$$

$=-\dfrac{5sen\,x}{(1+2\cos x)^2}$. Il cui campo di derivabilità coincide con il dominio della funzione.

Inoltre $\displaystyle\lim_{x\to\frac{2}{3}\pi} -\frac{\overset{\nearrow \frac{5\sqrt{3}}{2}}{5sen\,x}}{\underset{\searrow 0^+}{\boxed{(1+2\cos x)^2}}}=-\infty$ e $\displaystyle\lim_{x\to\frac{4}{3}\pi} -\frac{\overset{\nearrow -\frac{5\sqrt{3}}{2}}{5sen\,x}}{\underset{\searrow 0^+}{\boxed{(1+2\cos x)^2}}}=+\infty$

7. Zeri della derivata prima

$$f'(x)=0\,; \qquad -\frac{5sen\,x}{(1+2\cos x)^2}=0\,; \qquad 5sen\,x=0\,; \qquad sen\,x=0\,; \qquad \begin{matrix} x=0 \\ x=\pi \\ x=2\pi \end{matrix}$$

8. Segno della derivata prima

$f'(x)>0\,;\quad \dfrac{-5sen\,x}{(1+2\cos x)^2}>0\,;$

Essendo il denominatore positivo $\forall x\in\overline{D}_f \quad\Rightarrow\quad f'(x)>0$ quando $-5sen\,x>0\,;$

cioè quando $sen\,x<0\,;$ cioè per $\pi<x<2\pi$; intervallo da studiare sempre nel dominio $\overline{D}_f$ della funzione.

In definitiva:

$f'(x)>0$ negli intervalli $\left(\pi,\frac{4}{3}\pi\right)\cup\left(\frac{4}{3}\pi,2\pi\right)$.

$f'(x)<0$ negli intervalli $\left(0,\frac{2}{3}\pi\right)\cup\left(\frac{2}{3}\pi,\pi\right)$.

x	0		$\frac{2}{3}\pi$		π		$\frac{4}{3}\pi$		2π
$f'(x)$	0	$-$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$	$+$	0
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Ne segue che i punti $x=0$ e $x=2\pi$ sono punti di massimo relativo.

Mentre il punto $x=\pi$ è un punto di minimo relativo.

I corrispondenti punti sulla curva sono: $A\left(0;\frac{5}{3}\right)$, $D\left(2\pi;\frac{5}{3}\right)$ e $M(\pi;5)$.

Infatti: $f(\pi)=\dfrac{5\cos\pi}{1+2\cos\pi}=\dfrac{5\cdot(-1)}{1+2\cdot(-1)}=\dfrac{-5}{-1}=5$.

9. <u>Derivata seconda</u>

$$f''(x) = -5 \cdot \frac{\cos x \cdot (1+2\cos x)^2 - \operatorname{sen} x \cdot 2 \cdot (1+2\cos x)\cdot(-2\operatorname{sen} x)}{(1+2\cos x)^4} =$$

$$= -5 \cdot \frac{\cos x \cdot (1+2\cos x)^2 + 4\operatorname{sen}^2 x \cdot (1+2\cos x)}{(1+2\cos x)^4} = -5 \cdot \frac{\cos x \cdot (1+2\cos x) + 4\operatorname{sen}^2 x}{(1+2\cos x)^3} =$$

$$= -5 \cdot \frac{\cos x + 2\cos^2 x + 4\cdot(1-\cos^2 x)}{(1+2\cos x)^3} = -5 \cdot \frac{\cos x + 2\cos^2 x + 4 - 4\cos^2 x}{(1+2\cos x)^3} =$$

$$= 5 \cdot \frac{2\cos^2 x - \cos x - 4}{(1+2\cos x)^3}$$

10. <u>Zeri della derivata seconda</u>

$f''(x) = 0$; $\quad 5 \cdot \frac{2\cos^2 x - \cos x - 4}{(1+2\cos x)^3} = 0$; $\quad 2\cos^2 x - \cos x - 4 = 0$; $\quad$ posto $\cos x = t$ si ha:

$$2t^2 - t - 4 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{1+32}}{4} = \frac{1 \mp \sqrt{33}}{4} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1-\sqrt{33}}{4} \\ \frac{1+\sqrt{33}}{4} \end{array} \right.$$ ricordando che $t = \cos x$ si ha:

$$= \left\langle \begin{array}{l} \cos x = \frac{1-\sqrt{33}}{4} \\ \cos x = \frac{1+\sqrt{33}}{4} \end{array} \right.$$ ma essendo $$\left\langle \begin{array}{l} \frac{1-\sqrt{33}}{4} < -1 \\ \frac{1+\sqrt{33}}{4} > 1 \end{array} \right.$$ l'equazione non ha soluzioni reali.

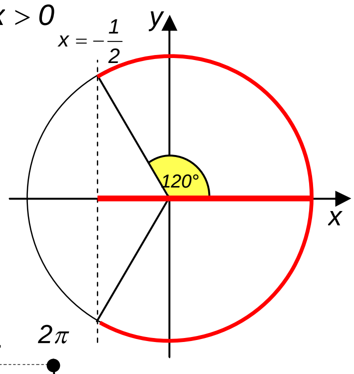
Pertanto la curva non ha flessi.

11. <u>Segno della derivata seconda</u>

$f''(x) > 0$; $\quad 5 \cdot \frac{2\cos^2 x - \cos x - 4}{(1+2\cos x)^3} > 0$; $\quad \begin{array}{l} 2\cos^2 x - \cos x - 4 > 0 \\ (1+2\cos x)^3 > 0 \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} 2\cos^2 x - \cos x - 4 > 0 \quad (*) \\ 1+2\cos x > 0 \end{array}$

(*) $2\cos^2 x - \cos x - 4 > 0$; $\quad \cos x < \frac{1-\sqrt{33}}{4} = -1{,}2$; $\quad \cos x > \frac{1+\sqrt{33}}{4} = +1{,}7$

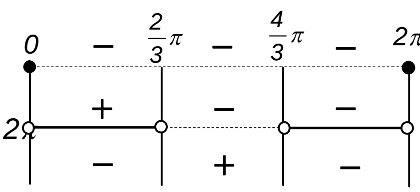
Queste ultime due diseguaglianze non sono mai verificate perché $- \leq \cos x \leq +1$.



Pertanto si ha:

$2\cos^2 x - \cos x - 4 > 0 \qquad$ sempre < 0

$\cos x > -\frac{1}{2} \qquad 0 < x < \frac{2}{3}\pi; \quad \frac{4}{3}\pi < x < 2\pi$



In definitiva:

La funzione volge la concavità verso l'alto nell'intervallo $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right)$.

La funzione volge la concavità verso il basso negli intervalli $\left(0, \frac{2}{3}\pi\right) \cup \left(\frac{4}{3}\pi, 2\pi\right)$.

12. Massimi e minimi assoluti

La funzione non è ne inferiormente ne superiormente limitata. Non ha pertanto ne un minimo assoluto ne un massimo assoluto.

13. Grafico