1. **Dominio :** $f(x) = x^4 - 4x^2$ è una funzione razionale intera di quarto grado, definita, continua e derivabile in $(-\infty, +\infty)$.

2. **Simmetrie :** $f(x)$ è simmetrica rispetto all'asse y, $f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 = x^4 - 4x^2 = f(x)$.
Pertanto conviene studiarla in $[0;+\infty)$ ed in seguito simmetrizzarla rispetto all'asse y .

3. **Intersezioni con gli assi :** $f(x)$ interseca gli assi in $O(0;0)$, $A(-2;0)$ e $B(2;0)$, infatti:

$$\begin{cases} y = x^4 - 4x^2 \\ x = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 0^4 - 4 \cdot 0^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow O(0;0)$$

$$\begin{cases} y = x^4 - 4x^2 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} 0 = x^4 - 4x^2 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 \cdot (x^2 - 4) = 0; \left| \begin{array}{l} x^2 = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2; x = 2 \end{array} \Rightarrow O(0;0) \quad A(-2;0) \quad B(2;0) \\ y = 0 \end{cases}$$

4. **Segno di f (x) :** $f(x) > 0;\ x^4 - 4x^2 > 0;\ x^2 \cdot (x^2 - 4) > 0;\ \left| \begin{array}{l} x^2 > 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} x \neq 0 \\ x < -2; x > 2 \end{array}$

	-2		0		2	
+		+		+		+
+		−		−		+
+		−		−		+

$f(x) > 0$ in $(-\infty;2) \cup (2;+\infty)$

$f(x) < 0$ in $(-2;0) \cup (0;2)$

5. **Limiti ed Asintoti :** La funzione, come tutte le funzioni razionali intere, non ammette asintoti verticali, orizzontali e obliqui.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x^4 - 4x^2 \right) = (+\infty - \infty = ?) = \lim_{x \to +\infty} x^4 \cdot \left(1 - \frac{4}{x^2} \right) = +\infty \text{ poiché } \frac{4}{x^2} \to 0$$

6. **Derivata Prima :** $f^{I}(x) = 4x^3 - 4 \cdot 2x = 4x^3 - 8x$

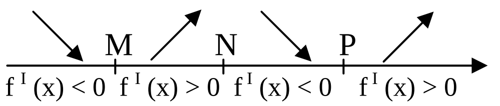
7. **Zeri della Derivata Prima :**

$$f^{I}(x) = 0;\ 4x^3 - 8x = 0;\ 4x \cdot (x^2 - 2) = 0;\ \begin{array}{l} 4x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{2};\ x = +\sqrt{2} \end{array}$$

8. **Segno della Derivata Prima :** $f^{I}(x) > 0;\ 4x^3 - 8x > 0;\ 4x \cdot (x^2 - 2) > 0;$

$$\begin{array}{l} 4x > 0 \\ x^2 - 2 > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} x > 0 \\ x < -\sqrt{2};\ x > +\sqrt{2} \end{array} \right.$$

	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
−		−		+		+
+		−		−		+
−		+		−		+



M e **P** sono punti di minimo relativo
N è un punto di massimo relativo

$$Y_M = f(X_M) = f(-\sqrt{2}) = \left(-\sqrt{2}\right)^4 - 4 \cdot \left(-\sqrt{2}\right)^2 = 4 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 \Rightarrow M\left(-\sqrt{2};-4\right)$$

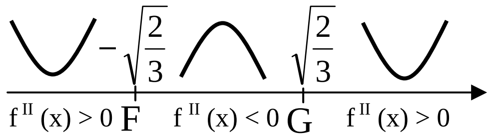
$$Y_N = f(X_N) = f(0) = (0)^4 - 4 \cdot (0)^2 = 0 - 4 \cdot 0 = 0 \Rightarrow N(0;0)$$

$$Y_P = f(X_P) = f(\sqrt{2}) = \left(\sqrt{2}\right)^4 - 4 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 4 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 \Rightarrow P\left(\sqrt{2};-4\right)$$

9. **Derivata Seconda :** $f^{II}(x) = 4 \cdot 3x^2 - 8 = 12x^2 - 8$

10. **Zeri della Derivata Seconda :** $f^{II}(x) = 0 ;\ 12x^2 - 8 = 0 ;\ x^2 = \frac{8}{12} ;\ x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

11. **Segno della Derivata Seconda :** $f^{II}(x) > 0 ;\ 12x^2 - 8 > 0 ;\ x < -\sqrt{\frac{2}{3}} ;\ x > \sqrt{\frac{2}{3}}$

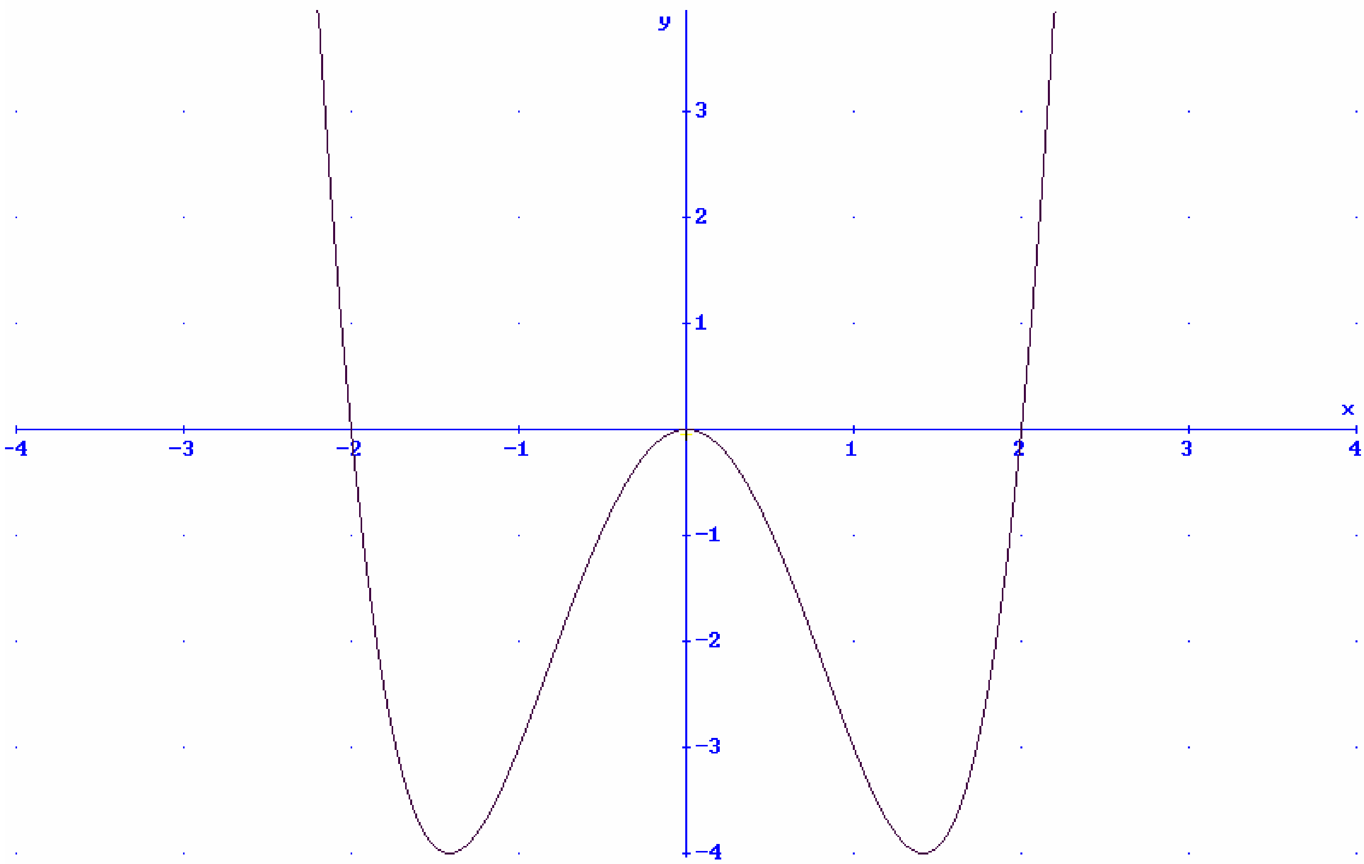


F e G sono punti di flesso

$$Y_F = f(X_F) = f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4 - 4 \cdot \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{4}{9} - 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} - \frac{8}{3} = \frac{4-24}{9} = -\frac{20}{9}$$

$$Y_G = f(X_G) = f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4 - 4 \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{4}{9} - 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} - \frac{8}{3} = \frac{4-24}{9} = -\frac{20}{9}$$

$$\Rightarrow \qquad F\left(-\sqrt{\frac{2}{3}};-\frac{20}{9}\right) \qquad e \qquad G\left(\sqrt{\frac{2}{3}};-\frac{20}{9}\right)$$



La funzione è inferiormente limitata ma non superiormente limitata.
I punti M e P sono punti di minimo assoluto.
Il condominio della funzione è $[-4 , +\infty\ )$