LIMITI

Calcolo di limiti di funzioni goniometriche

Il calcolo di gran parte dei limiti delle funzioni goniometriche si effettua utilizzando i seguenti limiti notevoli:

Limite notevole	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Da dimostrare

Limite notevole	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

Facciamo comparire la funzione seno esplicitando la funzione tangente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1 .$$

Limite notevole	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

Facciamo comparire la funzione seno moltiplicando numeratore e denominatore per il fattore $1 + \cos x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cdot (1 + \cos x)} = \quad ricordando\ la\ relazione \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad si\ ha:$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x} \cdot \frac{1}{\cdot (1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0 .$$

Limite notevole	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

Facciamo comparire la funzione seno moltiplicando numeratore e denominatore per il fattore $1 + \cos x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \cdot (1 + \cos x)} = \quad ricordando\ la\ relazione \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad si\ ha:$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cdot (1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 .$$

Limite notevole	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} 1 \cdot \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} 1 : \frac{\sin x}{x} = 1 : 1 = 1 .$$

Esercizio 1267.228

$$\lim_{x\to 0} \frac{5\,sin\,3x}{2x} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{5\,sin\,3x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{5}{2}\cdot\frac{sin\,3x}{3x}\cdot 3 = \frac{5}{2}\cdot 1\cdot 3 = \frac{15}{2}.$$

Esercizio 1267.230

$$\lim_{x\to 0} \frac{5\,sin^3\,2x}{7x^3} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{5\,sin^3\,2x}{7x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{5}{7}\cdot\frac{sin\,2x}{2x}\cdot\frac{sin\,2x}{2x}\cdot\frac{sin\,2x}{2x}\cdot 8 = \frac{5}{7}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 8 = \frac{40}{7}.$$

Esercizio 1267.231

$$\lim_{x\to 0} \frac{5\,cos^2\,x - 5}{3x} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{5\,cos^2\,x - 5}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{5}{3}\cdot\frac{(cos^2\,x - 1)}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{5}{3}\cdot\frac{1 - cos^2\,x}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{5}{3}\cdot\frac{sin^2\,x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{5}{3}\cdot\frac{sin\,x}{x}\cdot sin\,x = -\frac{5}{3}\cdot 1\cdot 0 = 0\,.$$

Esercizio 1267.235

$$\lim_{x\to 0} \frac{5\,tan\,x + 2x}{3x} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{5\,tan\,x + 2x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{5\,tan\,x}{3x} + \frac{2x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{5}{3}\cdot\frac{tan\,x}{x} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}\cdot 1 + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}.$$

Esercizio 1267.237

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x^2 - 2x}{3x + sin\,x} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

Raccogliamo x a fattor comune:

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x^2 - 2x}{3x + sin\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(5x-2)}{x\cdot\left(3 + \frac{sin\,x}{x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{5x - 2}{3 + \frac{sin\,x}{x}} = \frac{0-2}{3+1} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 1267.238

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{3\,cos\,x - 3} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

Raccogliamo x a fattor comune:

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{3\,cos\,x - 3} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{3\cdot(cos\,x - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{-3\cdot(1 - cos\,x)}\cdot\frac{1 + cos\,x}{1 + cos\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^2\cdot(1 + cos\,x)}{-3\cdot(1 - cos^2\,x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{5x^2\cdot(1 + cos\,x)}{3\,sin^2\,x} = = \lim_{x\to 0} -\frac{5}{3}\cdot\frac{x}{sin\,x}\cdot\frac{x}{sin\,x}\cdot(1 + cos\,x) = -\frac{5}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 2 = -\frac{10}{3}\,.$$

Esercizio 1267.239

$$\lim_{x\to 0} \frac{5\,tan\,3x}{7\,sin\,2x} \;=\; \left(\frac{0}{0}=?\right)$$

Raccogliamo x a fattor comune:

$$\lim_{x\to 0} \frac{5\,tan\,3x}{7\,sin\,2x} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{5}{7}\cdot\frac{tan\,3x}{sin\,2x} \;=\; \qquad \textit{dividiamo numeratore e denominatore per } x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{5}{7}\cdot\frac{\frac{tan\,3x}{x}}{\frac{sin\,2x}{x}} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{5}{7}\cdot\frac{\frac{tan\,3x}{3x}\cdot 3}{\frac{sin\,2x}{2x}\cdot 2} \;=\; \frac{5}{7}\cdot\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2} \;=\; \frac{15}{14}\;.$$

Esercizio 1267.240

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos\,x}{\left(1-\sqrt{2-cos\,x}\right)} \;=\; \left(\frac{0}{0}=?\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos\,x}{\left(1-\sqrt{2-cos\,x}\right)} \;=\; \qquad \textit{moltiplichiamo numeratore e denominatore per } 1+\sqrt{2-cos\,x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos\,x}{\left(1-\sqrt{2-cos\,x}\right)}\cdot\frac{1+\sqrt{2-cos\,x}}{1+\sqrt{2-cos\,x}} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{(1-cos\,x)\cdot\left(1+\sqrt{2-cos\,x}\right)}{1^2-\left(\sqrt{2-cos\,x}\right)^2} \;=$$

$$=\; \lim_{x\to 0} \frac{(1-cos\,x)\cdot\left(1+\sqrt{2-cos\,x}\right)}{1-(2-cos\,x)} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{(1-cos\,x)\cdot\left(1+\sqrt{2-cos\,x}\right)}{1-2+cos\,x} \;=$$

$$=\; \lim_{x\to 0} \frac{(1-cos\,x)\cdot\left(1+\sqrt{2-cos\,x}\right)}{-1+cos\,x} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{(1-cos\,x)\cdot\left(1+\sqrt{2-cos\,x}\right)}{-(1-cos\,x)} \;=$$

$$=\; \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+\sqrt{2-cos\,x}\right)}{-1} \;=\; -2\;.$$

Esercizio 1267.241

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,sin\,x-5x}{3x+7\,sin\,x} \;=\; \left(\frac{0}{0}=?\right)$$

Raccogliamo x a fattor comune:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,sin\,x-5x}{3x+7\,sin\,x} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\left(2\cdot\frac{\sin x}{x}-5\right)}{x\cdot\left(3+7\cdot\frac{sin\,x}{x}\right)} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\frac{\sin x}{x}-5}{3+7\cdot\frac{sin\,x}{x}} \;=\; \frac{2\cdot 1-5}{3+7\cdot 1} \;=\; -\frac{3}{10}\;.$$

Esercizio 1267.247

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x-3\,sin\,x}{3x} \;=\; \left(\frac{0}{0}=?\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x-3\,sin\,x}{3x} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1-\cos x-3\,sin\,x}{x}\right] \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1-\cos x}{x}-\frac{3\,sin\,x}{x}\right] \;=$$

$$=\; \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1-\cos x}{x}-3\cdot\frac{sin\,x}{x}\right] \;=\; \frac{1}{3}\cdot[0-3\cdot 1] \;=\; -1\;.$$

Esercizio 1267.251

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{3x} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{3x} = \quad \textit{moltiplichiamo numeratore e denominatore per } \sqrt{1+\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{3x}\cdot\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)}}{3x\cdot\left(\sqrt{1+\cos x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{3x\cdot\left(\sqrt{1+\cos x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{3x\cdot\left(\sqrt{1+\cos x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{3x\cdot\left(\sqrt{1+\cos x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} \quad \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Esercizio 1267.253

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\cos(x+\pi)}{\sin 3x} = \left(\frac{0}{0} = ?\right) \quad \textit{applicando la formula di addizione del coseno si ha:}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\cos(x+\pi)}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x\cdot\cos\pi-\sin x\cdot\sin\pi}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x\cdot(-1)-\sin x\cdot 0}{\sin 3x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 0 = 0 .$$

Esercizio 1267.254

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{2\sin x-5x}{3x-7\sin x}} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

Calcoliamo prima il limite dell'esponente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x-5x}{3x-7\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\left(2\cdot\frac{\sin x}{x}-5\right)}{x\cdot\left(3-7\cdot\frac{\sin x}{x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\frac{\sin x}{x}-5}{3-7\cdot\frac{\sin x}{x}} = \frac{2\cdot 1-5}{3-7\cdot 1} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} .$$

In seguito calcoliamo il limite richiesto:

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{2\sin x-5x}{3x-7\sin x}} = e^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{e^3} .$$

Esercizio 1267.254.b

$$\lim_{x\to \pi^-} e^{\frac{\sin x}{1-\cos^2 x+\sin 2x}} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

Calcoliamo prima il limite dell'esponente:

$$\lim_{x\to \pi^-} \frac{\sin x}{1-\cos^2 x+\sin 2x} = \lim_{x\to \pi^-} \frac{\sin x}{\sin^2 x+\sin 2x} = \lim_{x\to \pi^-} \frac{\sin x}{\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to \pi^-} \frac{\sin x}{\sin x\cdot(\sin x+2\cos x)} = \lim_{x\to \pi^-} \frac{1}{\sin x+2\cos x} = \frac{1}{0+2\cdot(-1)} = -\frac{1}{2}$$

In seguito calcoliamo il limite richiesto:

$$\lim_{x\to \pi^-} e^{\frac{\sin x}{1-\cos^2 x+\sin 2x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} .$$