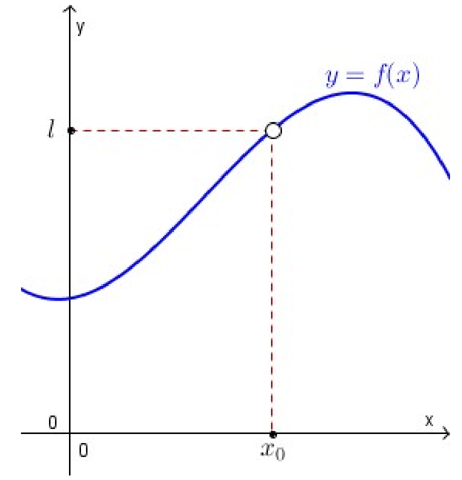
LIMITI

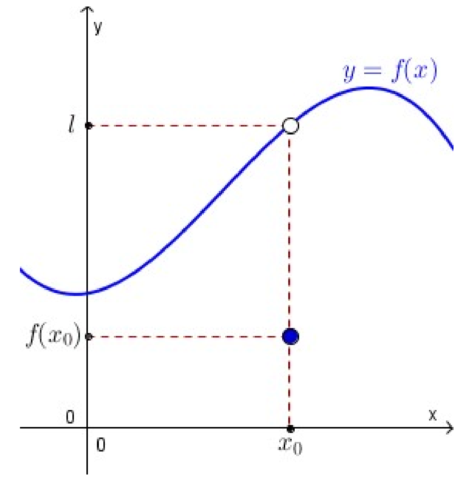
Calcolo di limiti

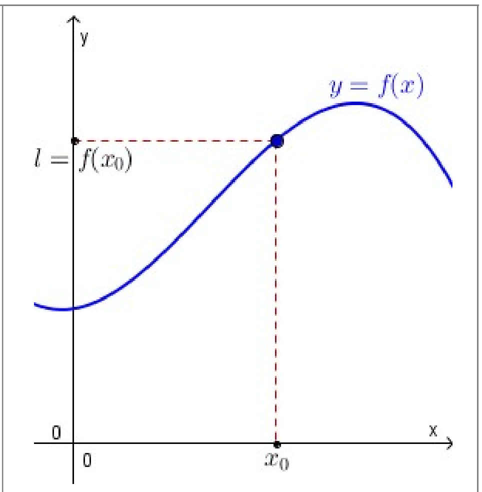
FUNZIONE CONTINUA

Definizione

Una funzione $f(x)$ si dice **continua** in un punto x_0 quando il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$





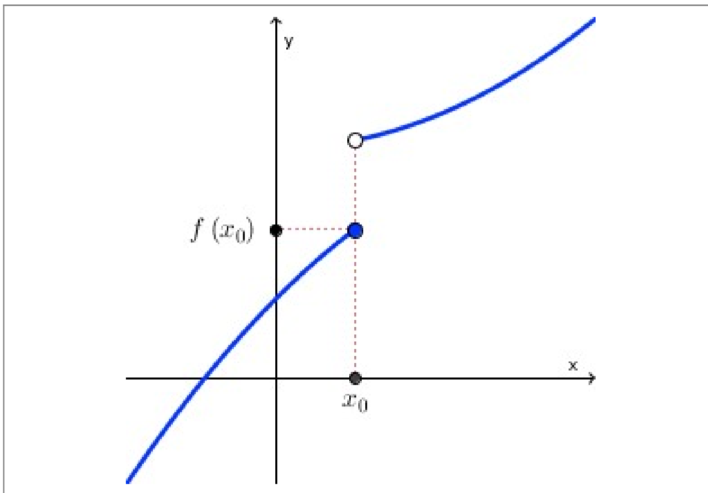


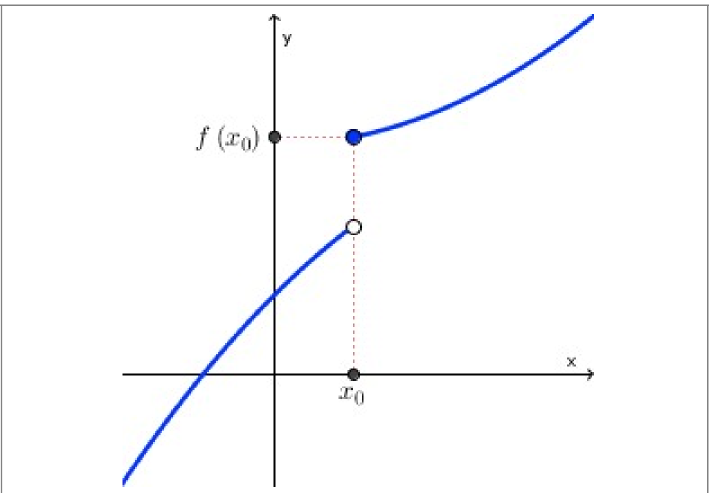
La funzione $f(x)$ non è definita in x_0 ma esiste il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$	La funzione $f(x)$ è definita in x_0 ma il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$	La funzione $f(x)$ è definita in x_0 e il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
La funzione $f(x)$ **non è continua** in x_0	La funzione $f(x)$ **non è continua** in x_0	La funzione $f(x)$ **è continua** in x_0

Definizione

Una funzione $f(x)$ si dice **continua a destra** in un punto x_0 quando il limite $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Una funzione $f(x)$ si dice **continua a sinistra** in un punto x_0 quando il limite $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$





La funzione $f(x)$ **è continua a sinistra** in x_0	La funzione $f(x)$ **è continua a destra** in x_0

Definizione

Una funzione $f(x)$ **è continua in un intervallo** I quando è continua in ogni punto dell'intervallo I .

Una funzione continua in un intervallo I è quella il cui grafico è una curva senza interruzioni (retta, parabola, …)

FUNZIONI CONTINUE ELEMENTARI

Le principali funzioni continue sono:

La funzione **razionale intera** $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \,.\,\,.\,\,.\, + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ è continua $\forall x \in R$.

La funzione **razionale fratta** $y = \frac{N(x)}{D(x)}$ è continua nell'insieme $\{x \in R \;\; / \;\; D(x) \neq 0\}$.

La funzione **irrazionale** di indice dispari $y = \sqrt[Dispari]{f(x)}$ è continua $\forall x \in R$.

La funzione **irrazionale** di indice pari $y = \sqrt[Pari]{f(x)}$ è continua nell'insieme $\{x \in R \;\; / \;\; f(x) \geq 0\}$.

La funzione **logaritmica** $y = log_a\, x$ è continua nell'insieme $\{x \in R \;\; / \;\; f(x) > 0\}$.

La funzione **esponenziale** $y = a^{f(x)}$ è continua $\forall x \in R$.

La funzione **esponenziale** $y = f(x)^{g(x)}$ è continua nell'insieme $\{x \in R \;\; / \;\; f(x) > 0\}$.

Le funzioni **goniometriche** $y = sin\, x$ e $y = cos\, x$ sono continue $\forall x \in R$.

La funzione **goniometrica** $y = tan\, f(x)$ è continua nell'insieme $\left\{x \in R \;\; / \;\; f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

La funzione **goniometrica** $y = cotan\, f(x)$ è continua nell'insieme $\{x \in R \;\; / \;\; f(x) \neq k\pi\}$.

La funzione **goniometrica** $y = arcsin\, f(x)$ è continua nell'insieme $\{x \in R \;\; / \;\; -1 \leq f(x) \leq 1\}$.

La funzione **goniometrica** $y = arccos\, f(x)$ è continua nell'insieme $\{x \in R \;\; / \;\; -1 \leq f(x) \leq 1\}$.

La funzione **goniometrica** $y = arctan\, f(x)$ è continua $\forall x \in R$.

LIMITI DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

Il calcolo del limite di una funzione continua, per $x \to x_0$, risulta particolarmente semplice. Infatti:

Il limite di una funzione continua $f(x)$ per $x \to x_0$ è uguale al valore della funzione nel punto x_0 .	$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Esempi

$$\lim_{x \to 2} (5x - 3) = f(2) = 5 \cdot 2 - 3 = 7$$

$$\lim_{x \to 2} (3 + 4x - 5x^2 + x^3) = 3 + 4 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 + 2^3 = 3 + 8 - 20 + 8 = -1$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x - x^3}{3x - 4} = \frac{2 \cdot 2 - 2^3}{3 \cdot 2 - 4} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\lim_{x \to -1} \sqrt[3]{2x - 5x^2 + x^3} = \sqrt[3]{2 \cdot (-1) - 5 \cdot (-1)^2 + (-1)^3} = \sqrt[3]{-2 - 5 - 1} = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

$$\lim_{x \to -1} \sqrt[4]{x - 3} = \nexists \qquad perchè \;\; in\, -1 \;\, la\, funzione\, non\, è\, definita.$$

$$\lim_{x \to 3} \sqrt[4]{x^2 + 2x + 1} = \sqrt[4]{3^2 + 2 \cdot 3 + 1} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[2]{2^4} = 2$$

$$\lim_{x \to 3} log_2\, (x + 5) = log_2\, 8 = 3$$

$$\lim_{x \to 3} log_2\, (1 - x) = \nexists$$

$$\lim_{x \to 3} 2^{\,2x-1} = 2^{\,2 \cdot 3 - 1} = 2^5 = 32$$

$$\lim_{x \to 3} (5 - x)^{\,2x-4} = (5 - 3)^{\,2 \cdot 3 - 4} = 2^2 = 4$$

$$\lim_{x \to 3} (1 - x)^{\,x+2} = \nexists$$

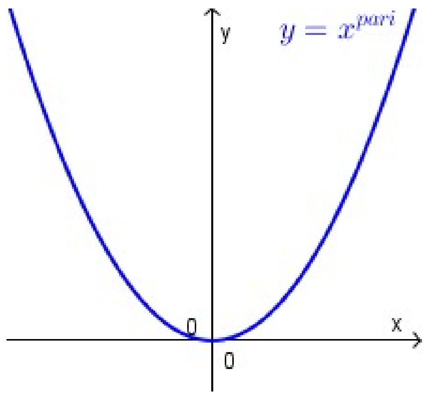
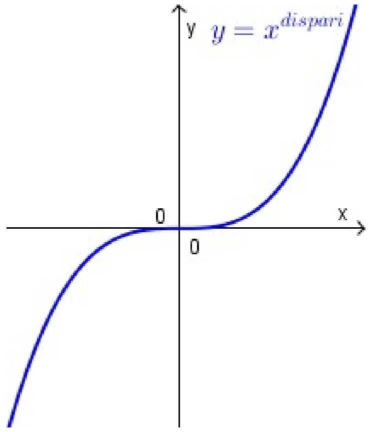
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} sin\, x = sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} tan\, x = tan \frac{\pi}{4} = 1$$

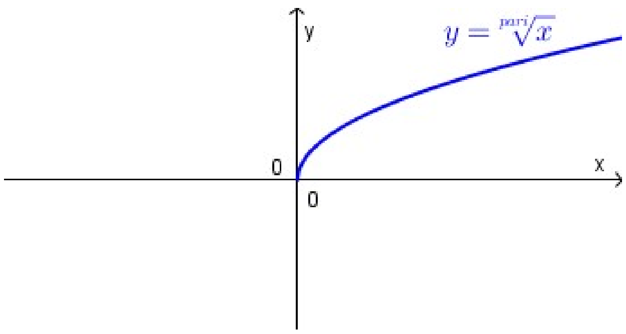
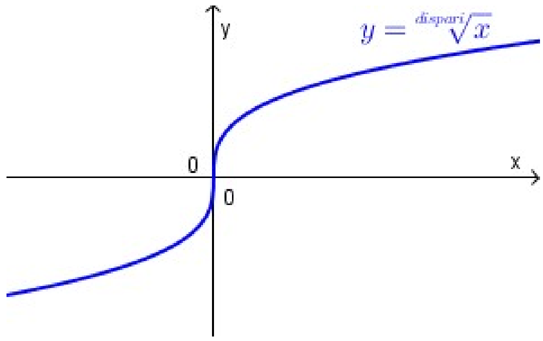
LIMITI DELLE FUNZIONI ELEMENTARI AGLI ESTREMI DELL’INSIEME DI DEFINIZIONE

Il limite di una funzione può essere ricavato anche dall’analisi del suo grafico.

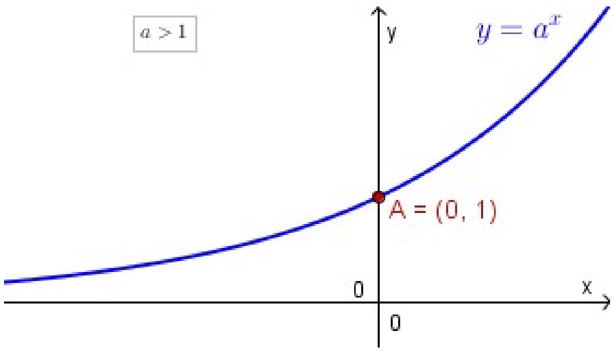
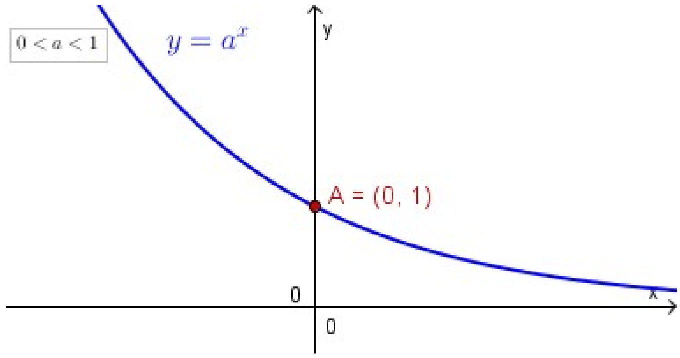
Funzione potenza

	
$\lim_{x \to -\infty} x^{pari} = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} x^{pari} = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} x^{dispari} = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} x^{dispari} = +\infty$

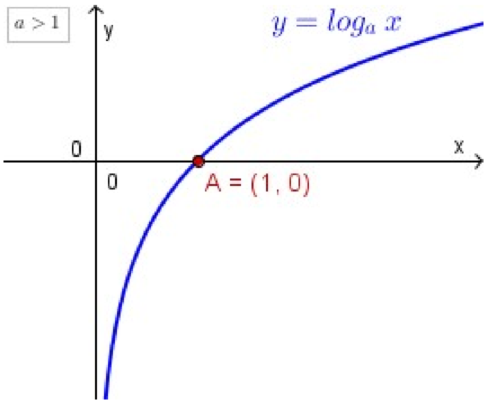
Funzione radice

	
$\lim_{x \to 0^+} \sqrt[pari]{x} = 0$ $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[pari]{x} = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[dispari]{x} = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[dispari]{x} = +\infty$

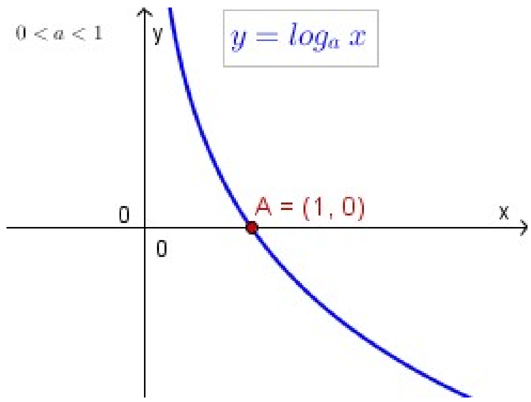
Funzione esponenziale

	
$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0^+$ $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0^+$

Funzione logaritmica

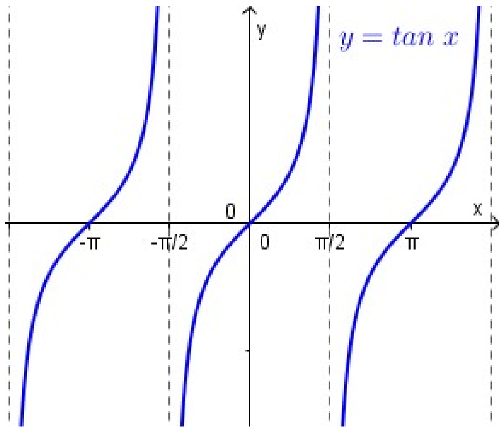


$\lim_{x\to 0^+} \log_a x \; = \; -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} \log_a x \; = \; +\infty$

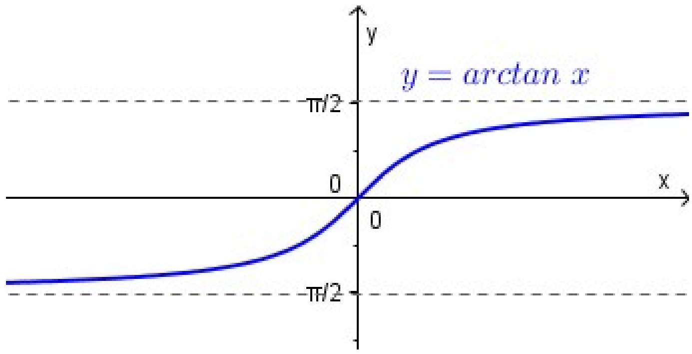


$\lim_{x\to 0^+} \log_a x \; = \; +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} \log_a x \; = \; -\infty$

Funzione tangente



$\lim_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan x \; = \; -\infty \qquad \lim_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x \; = \; +\infty$



$\lim_{x\to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

Esempi

$\lim_{x\to-\infty} \; x^5 \; = \; -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \; x^6 \; = \; +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \; \sqrt[2]{x} \; = \; +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x \; = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \; 5^x \; = \; 0^+ \qquad \lim_{x\to 0^+} \log_5 x \; = \; -\infty$

ALGEBRA DEI LIMITI

Per effettuare il calcolo dei limiti sono utili i seguenti teoremi relativi alle operazioni sui limiti.
Questi teoremi sono validi sia nel caso di limiti per x tendenti a valori finiti, sia per x tendenti a valori non finiti.

Teorema 1 - Le funzioni hanno limite finito

Siano $f(x)$ e $g(x)$ definite in un intorno $I_{x_0} - \{x_0\}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = m$$

$con \quad l, m \in R \quad e \quad x_0 \in R \cup \{\pm\infty\}$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} [\, f(x) + g(x) \,] = l + m$$

$$\lim_{x \to x_0} [\, f(x) - g(x) \,] = l - m$$

$$\lim_{x \to x_0} [\, f(x) \cdot g(x) \,] = l \cdot m$$

$$\lim_{x \to x_0} [\, k \cdot f(x) \,] = k \cdot l \qquad \forall k \in R$$

$$\lim_{x \to x_0} [\, f(x) \,]^n = l^n \qquad \forall n \in N - \{0\}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m} \qquad se \;\; m \neq 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m} \qquad se \;\; m \neq 0$$

Teorema 2 - Le funzioni non hanno entrambe limite finito

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$		$\lim_{x \to x_0} [\, f(x) + g(x) \,]$
l	$+\infty$	$\Rightarrow$	$l + \infty = +\infty$
l	$-\infty$		$l - \infty = -\infty$
$+\infty$	$+\infty$		$+\infty + \infty = +\infty$
$-\infty$	$-\infty$		$-\infty - \infty = -\infty$
$+\infty$	$-\infty$		$+\infty - \infty = \,?$

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$		$\lim_{x \to x_0} [\, f(x) \cdot g(x) \,]$ Secondo la regola dei segni
l	∞	$\Rightarrow$	$l \cdot \infty = \infty$
∞	∞		$\infty \cdot \infty = \infty$
0	∞		$0 \cdot \infty = \,?$

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$		$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x)}$ Secondo la regola dei segni
l	∞		$\frac{l}{\infty} = 0$
l	0		$\frac{l}{0} = \infty$
∞	l	$\Rightarrow$	$\frac{\infty}{l} = \infty$
0	0		$\frac{0}{0} = \,?$
∞	∞		$\frac{\infty}{\infty} = \,?$

Esempio 1

Consideriamo i due limiti tendenti allo stesso valore finito 1 *:*

$\lim_{x\to1}(5x-3) = 2$ *e* $\lim_{x\to1}(6-2x) = 4$

Calcoliamo il limite della somma algebrica delle due funzioni:

$$\lim_{x\to1}[(5x-3)+(6-2x)] = \lim_{x\to1}[5x-3+6-2x] = \lim_{x\to1}[3x+3] = 3\cdot1+3 = 6$$

Osserviamo che tale limite è uguale proprio alla somma dei due limiti $l_1 + l_2 = 2+4 = 6$.

Esempio 2

$Se\ \lim_{x\to1}(2x-5) = -3$, *allora* $\lim_{x\to1} 4\cdot(2x-5) = 4\cdot(-3) = -12$.

$Infatti$: $\lim_{x\to1} 4\cdot(2x-5) = \lim_{x\to1}(8x-20) = -12$.

Esempio 3

$Se\ \lim_{x\to1}(2x-5) = -3$ *e* $\lim_{x\to1}(4+x) = 5$, *allora* $\lim_{x\to1}(2x-5)\cdot(4+x) = -3\cdot5 = -15$.

$Infatti$: $\lim_{x\to1}(2x-5)\cdot(4+x) = \lim_{x\to1}(2x^2+3x-20) = -15$.

Esempio 4

$Se\ \lim_{x\to1}(2x+1) = 3$ *allora* $\lim_{x\to1}(2x+1)^2 = (3)^2 = 9$.

$Infatti$: $\lim_{x\to1}(2x+1)^2 = \lim_{x\to1}(4x^2+4x+1) = 9$.

Esempio 5

$Se\ \lim_{x\to2}(-3x) = -6$ *e* $\lim_{x\to2}\frac{5}{(x-2)^2} = +\infty$

Allora il limite del prodotto vale: $\lim_{x\to2}(-3x)\cdot\frac{5}{(x-2)^2} = -\infty$

FORME INDETERMINATE

Nella tabella ci sono delle celle senza risultato: $+\infty-\infty = ?$ $\mathbf{0}\cdot\infty = ?$ $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} = ?$ $\frac{\infty}{\infty} = ?$

Esse rappresentano delle **forme indeterminate** o di indecisione, perché il risultato dell'operazione non è univoco.

A tal proposito consideriamo i seguenti esempi:

Esempio 1

$Se\ \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ *e* $\lim_{x\to+\infty} -5x = -\infty$

$allora\ \lim_{x\to+\infty}[(2x)+(-5x)] = \lim_{x\to+\infty}(-3x) = -\infty$

Esempio 2

$Se\ \lim_{x\to+\infty} 5x = +\infty$ *e* $\lim_{x\to+\infty} -3x = -\infty$

$allora\ \lim_{x\to+\infty}[(5x)+(-3x)] = \lim_{x\to+\infty}(2x) = +\infty$

Esempio 3

Se $\lim_{x\to+\infty}(2x+3) = +\infty$ *e* $\lim_{x\to+\infty}(1-2x) = -\infty$

allora $\lim_{x\to+\infty}[(2x+3)+(1-2x)] = \lim_{x\to+\infty}(4) = 4$

In questi tre esempi i risultati ottenuti dal calcolo del limite della somma $+\infty-\infty$ sono uno diverso dall'altro.

Pertanto non è possibile definire una regola che permette di effettuare il calcolo $+\infty-\infty$ in maniera univoca.

Esempio 4

$Se\ \lim_{x\to 0}(5x^4)=0$ $\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^4}=+\infty$ $\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^6}=+\infty$

Allora il limite del prodotto: $\lim_{x\to 0}(5x^4)\cdot\frac{3}{x^4} = \lim_{x\to 0}(15) = 15$

Mentre il limite del prodotto: $\lim_{x\to 0}(5x^4)\cdot\frac{3}{x^6} = \lim_{x\to 0}\frac{15}{x^2}=+\infty$

In quest'ultimo esempio i risultati ottenuti dal calcolo del limite del prodotto $0\cdot\infty$ sono uno diverso dall'altro. Pertanto non è possibile definire una regola che permette di effettuare il calcolo $0\cdot\infty$ in maniera univoca.

IL LIMITE DELLA POTENZA

Teorema – Potenza con esponente un numero reale

$$\text{Se}\quad n\in R-\{0\}\quad e\quad \lim_{x\to x_0} f(x) = l\in R \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to x_0}[f(x)]^n = l^n$$

Esempio 1

$Se\ \lim_{x\to 2}(4x-5) = 3$ allora $\lim_{x\to 2}(4x-5)^2 = 3^2 = 9$.

Esempio 2

$Se\ \lim_{x\to 2}(4x+1) = 9$ allora $\lim_{x\to 2}\sqrt[2]{4x+1} = 3$

Teorema – Potenza con esponente una funzione

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$\Rightarrow$	$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}$
$+\infty$	**0**		$+\infty^{\,0} = ?$
	$+\infty$		$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$
	$-\infty$		$(+\infty)^{-\infty} = 0$
0	0		$0^{\,0} = ?$
	$+\infty$		$0^{+\infty} = 0$
	$-\infty$		$0^{-\infty} = +\infty$
1	0		$1^{\,0} = 1$
	∞		$1^{\infty} = ?$
$0<l<1$	0		$l^{\,0} = 1$
	$+\infty$		$l^{+\infty} = 0$
	$-\infty$		$l^{-\infty} = +\infty$
$l>1$	0		$l^{0} = 1$
	$+\infty$		$l^{+\infty} = +\infty$
	$-\infty$		$l^{-\infty} = 0$

Nella tabella ci sono tre forme indeterminate: $+\infty^{\,0} = ?$ $0^{\,0} = ?$ $1^{\infty} = ?$

LIMITI NOTEVOLI

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

$e = 2{,}71828182\ldots numero\ di\ Nepero$

Da dimostrare

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$$

Dimostrazione

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

Applichiamo la proprietà dei logaritmi:	$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} =$
Per la continuità della funzione logaritmica:	$= \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] =$
Poniamo $\frac{1}{x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t}$. *Per* $x\to 0 \Rightarrow t\to\infty$ *Sostituendo si ha:*	$= \ln\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right] = \ln e = 1.$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e}$$

Da dimostrare

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1}$$

Dimostrazione

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

Poniamo: $e^x - 1 = t \Rightarrow e^x = 1+t \Rightarrow x = \ln(1+t)$ *Per* $x\to 0 \Rightarrow t\to 0$	$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a}$$

Da dimostrare

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x} = k}$$

Da dimostrare

$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log_a x)^p}{x^n} = 0$	$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x} = 0$	$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log_a x)^p}{a^x} = 0$	$\forall\, a>1 \quad \forall\, n>0 \quad \forall\, p>0$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Da dimostrare

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1}$$

Dimostrazione

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} 1 \cdot \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} 1 : \frac{\sin x}{x} = 1 : 1 = 1 \ .$$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1}$$

Dimostrazione

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

Facciamo comparire la funzione seno esplicitando la funzione tangente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1 \ .$$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0}$$

Dimostrazione

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

Facciamo comparire la funzione seno moltiplicando numeratore e denominatore per il fattore $1 + \cos x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cdot (1 + \cos x)} = \quad \text{ricordando la relazione} \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \text{si ha:}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x} \cdot \frac{1}{\cdot (1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0 \, .$$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

Dimostrazione

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

Facciamo comparire la funzione seno moltiplicando numeratore e denominatore per il fattore $1 + \cos x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \cdot (1 + \cos x)} = \quad \text{ricordando la relazione} \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \text{si ha:}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cdot (1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 \, .$$