Integrali Indefiniti

Il problema fondamentale del calcolo differenziale è determinare la derivata di una funzione assegnata.

Il calcolo integrale affronta il problema inverso, e cioè quello di individuare una funzione di cui si conosce la sua derivata.

<u>Definizione</u>

Data una funzione $f(x)$, definita in un intervallo I, si dice che la funzione $F(x)$ è una primitiva della funzione $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$.

<u>Teorema</u>

Una funzione $f(x)$ continua in un intervallo I ammette primitive nell'intervallo I.

<u>Teorema</u>

Se $F(x)$ è una primitiva della funzione $f(x)$ allora $F(x)+k$, con k costante, è una primitiva della funzione $f(x)$.

<u>Definizione</u>

L'insieme di tutte le infinite primitive di una funzione $f(x)$ si dice integrale indefinito di $f(x)$.

In simboli: $$\boxed{\int f(x)\ dx = F(x)+k}$$

.

L'integrale indefinito rappresenta nel piano cartesiano un insieme di funzioni i cui grafici differiscono solo per una traslazione lungo l'asse y data dal parametro k.

<u>Proprietà</u>

$$\boxed{\int k \cdot f(x)\ dx = k \cdot \int f(x)\ dx}$$

$$\boxed{\int \left[f_1(x) + f_2(x) + \ \dots \ + f_n(x) \right] dx = \int f_1(x)\ dx + \int f_2(x)\ dx + \ \dots \ + \int f_n(x)\ dx}$$

Regole di Integrazione

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\ dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + k$
$\int e^x dx = e^x + k$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\ dx = e^{f(x)} + k$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + k$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\ dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + k$
$\int \frac{1}{x} dx = \log \|x\| + k$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \log \|f(x)\| + k$
$\int sen\ x\ dx = -\cos x + k$	$\int f'(x) \cdot sen\ f(x)\ dx = -\cos\ f(x) + k$
$\int \cos x\ dx = sen\ x + k$	$\int f'(x) \cdot \cos\ f(x)\ dx = sen\ f(x) + k$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = tg\ x + k$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\ dx = tg\ f(x) + k$
$\int \frac{1}{sen^2 x}\ dx = -cotg\ x + k$	$\int \frac{f'(x)}{sen^2 f(x)}\ dx = -cot\,g\ f(x) + k$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = arcsen\ x + k$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\ dx = arcsen\ f(x) + k$
$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = arctg\ x + k$	$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\ dx = arctg\ f(x) + k$
$\int tg\ x\ dx = -\log \|\cos x\| + k$	$\int f'(x) \cdot tg\ f(x)\ dx = -\log \|\cos\ f(x)\| + k$
$\int cot\,g\ x\ dx = \log \|sen\ x\| + k$	$\int f'(x) \cdot cotg\ f(x)\ dx = \log \|sen\ f(x)\| + k$
$\int \frac{1}{a^2+x^2}\ dx = \frac{1}{a} arctg\ \frac{x}{a} + k$	$\int \frac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2}\ dx = \frac{1}{a} arctg\ \frac{f(x)}{a} + k$
$\int \frac{1}{a^2-x^2}\ dx = \frac{1}{2a} \log \left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + k$	$\int \frac{f'(x)}{a^2-[f(x)]^2}\ dx = \frac{1}{2a} \log \left\|\frac{a+f(x)}{a-f(x)}\right\| + k$
$\int \frac{1}{x^2-a^2}\ dx = \frac{1}{2a} \log \left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + k$	$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2-a^2}\ dx = \frac{1}{2a} \log \left\|\frac{f(x)-a}{f(x)+a}\right\| + k$

Altre regole di Integrazione

$\int x \cdot dx = \frac{x^2}{2} + k$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -arccos \; x + k$
$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + k$	$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = -arccotg \; x + k$
$\int \sqrt{x} \cdot dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + k$	$\int tg^2 x \; dx = -x + tg \; x + k$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx = 2\sqrt{x} + k$	$\int cotg^2 x \; dx = -x - cotg \; x + k$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \, dx = log \left\| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\| + k$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = arcsen \frac{x}{\|a\|} + k$
$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} \, dx = \sqrt{x^2 + a} + k$	$\int \frac{x}{\sqrt{a - x^2}} \, dx = -\sqrt{a - x^2} + k$
$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2}\left(a^2 arcsen \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} \right) + k$	