RELAZIONI

Relazioni binarie

Dati due insiemi non vuoti A e B (che possono eventualmente coincidere), si dice **relazione** tra A e B una qualsiasi legge che associa elementi $x \in A$ ad elementi $y \in B$.

L'insieme A è detto **insieme di partenza**. L'insieme B è detto **insieme di arrivo**.

Per indicare che un elemento $x \in A$ è in relazione con un elemento $y \in B$ tramite la relazione R si scrive: $\boldsymbol{x\ R\ y}$.

L'elemento y è detto **immagine** di x . L'elemento x è detto **controimmagine** di y.

Il **dominio** o insieme di definizione di una relazione R, è il sottoinsieme D dell'insieme di partenza A formato da tutti gli elementi di $x \in A$ che hanno almeno un'immagine $y \in B$. In simboli $D = \{x \in A \ / \ x\ R\ y \ \ \wedge \ \ y \in B\}$.

Il **codominio** o insieme immagine di una relazione R, è il sottoinsieme C dell'insieme di arrivo B costituito da tutti gli elementi y ∈ B che sono immagini di almeno un elemento $x \in A$. In simboli $C = \{y \in B \ / \ x\ R\ y \ \ \wedge \ \ x \in A\}$.

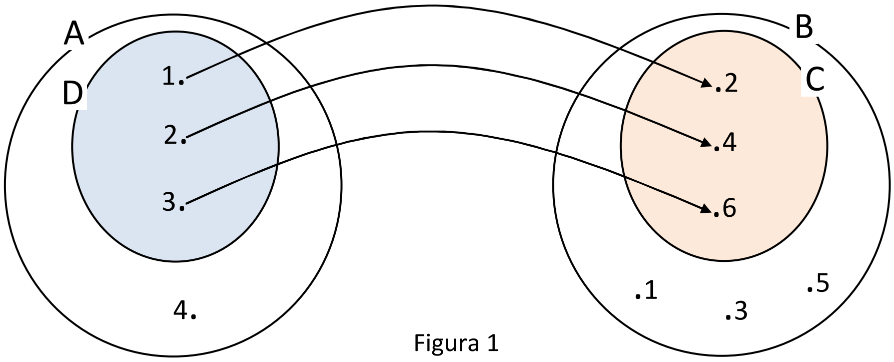


Figura 1

Esempio

Nella relazione R*: "x è la metà di y" fra gli insiemi* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e* $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
il Dominio è l'insieme $D = \{\ 1, 2, 3\ \}$ *, mentre il Codominio è l'insieme* $C = \{\ 2, 4, 6\ \}$

Relazione inversa

Data una relazione R tra l'insieme A e l'insieme B, la relazione inversa è la relazione R^{-1} tra l'insieme B e l'insieme A. Essa si ricava invertendo l'ordine delle coppie ordinate secondo la relazione diretta R.

Esempio

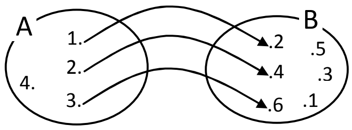
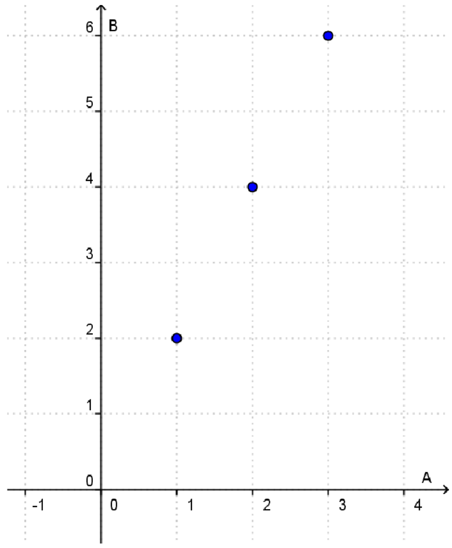
Considerando la relazione $R = \{\ (1;2), (2;\ 4), (3;6)\ \}$ *, la relazione inversa è* $R^{-1} = \{\ (2;1), (4;\ 2), (6;3)\ \}$.

Note

Una relazione R tra due insiemi A e B è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.
La relazione R fra due insiemi A e B è detta **vuota** se nessun elemento di A è associato a qualche elemento di B.
La relazione **Identità** su un insieme A, è la relazione $R = \{(x;x) \ / \ x \in A\}$.
La relazione **Totale** su un insieme A, è la relazione $R = \{(x;y) \ / \ x, y \in A\}$.

Rappresentazione di una relazione

Una relazione può essere rappresentata tramite:

<table>
<tr><td>Rappresentazione per elencazione</td><td>La rappresentazione per elencazione consiste nell’elencare tutte le coppie ordinate che verificano la relazione</td><td>$R = \{ (1; 2), (2;\ 4), (3; 6) \}$</td></tr>
<tr><td>Rappresentazione sagittale o diagramma a frecce</td><td>La rappresentazione tramite diagramma a frecce consiste nel collegare con delle frecce gli elementi dei due insiemi che verificano la relazione</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Rappresentazione tramite diagramma cartesiano</td><td>La rappresentazione tramite diagramma cartesiano consiste nel rappresentare i punti le cui coordinate sono le coppie di elementi che sono in relazione.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Rappresentazione tramite tabella a doppia entrata</td><td>La rappresentazione tramite tabella a doppia entrata consiste nel costruire una tabella avente la prima colonna formata dagli elementi dell’insieme di partenza $\boldsymbol{A}$ e la prima riga formata dagli elementi dell’insieme di arrivo $\boldsymbol{B}$, e nell’inserire delle crocette nelle celle corrispondenti alle coppie che sono in relazione.</td><td><table>
<tr><td>A\B</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td></tr>
</table>

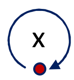
Relazioni definite in un insieme

Una relazione in cui l’insieme di partenza e l’insieme di arrivo coincidono con uno stesso insieme A, è detta **relazione in A**.

In una relazione definita in un insieme A, la rappresentazione sagittale assume un’altra forma grafica detta **grafo**.

Un grafo è costituito da punti, detti **nodi**, collegati tra loro da frecce, detti **spigoli**.

I nodi sono gli elementi dell’insieme in cui è definita la relazione e le frecce collegano gli elementi in relazione.

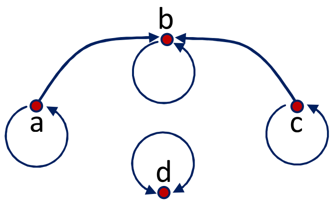
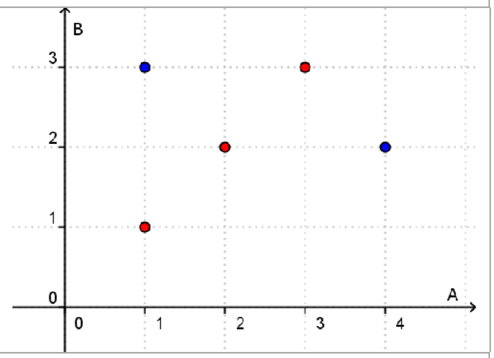
Tipo di relazione	Grafo	Esempio
x è in relazione con y	Si collegano i due nodi con una freccia orientata da x verso y	
x è in relazione con se stesso	Si disegna un cappio intorno al nodo x	
x è in relazione con y e y è in relazione con x	Si collegano i due nodi con una freccia a due punte	

Proprietà riflessiva

Una relazione R, definita in un insieme non vuoto A, è **riflessiva** se ogni elemento di A è in relazione con se stesso. In simboli: $\forall x \in A\,,\ \ x\,R\,x$.

Esempi

La relazione R:"x ha la stessa età di y" è riflessiva.
La relazione R:"x è figlio di y" non è riflessiva.

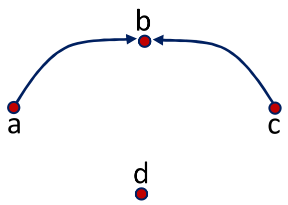
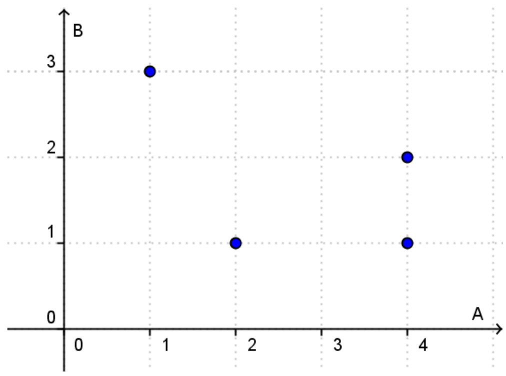
<table>
<tr><th colspan="3">Grafici della relazione riflessiva</th></tr>
<tr><th>Grafo</th><th>Tabella a doppia entrata</th><th>Diagramma cartesiano</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td><table>
<tr><th>A\B</th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th></tr>
<tr><td>a</td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>b</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>d</td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td></tr>
</table></td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td>Ogni nodo ha un cappio</td><td>In tutte le caselle della diagonale principale c'è una crocetta</td><td>Tutti i punti della bisettrice sono contrassegnati</td></tr>
</table>

Proprietà antiriflessiva

Una relazione R, definita in un insieme non vuoto A, è **antiriflessiva** se ogni elemento di A non è in relazione con se stesso. In simboli: $\forall x \in A\,,\ \ x \not R\ x$.

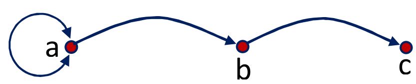
Esempi

La relazione R:"x è figlio di y" è antiriflessiva.
La relazione R:"x è divisore di y" non è antiriflessiva.

<table>
<tr><th colspan="3">Grafici della relazione antiriflessiva</th></tr>
<tr><th>Grafo</th><th>Tabella a doppia entrata</th><th>Diagramma cartesiano</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td><table>
<tr><th>A\B</th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th></tr>
<tr><td>a</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>b</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>d</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
</table></td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td>Non c'è alcun cappio ai nodi</td><td>In tutte le caselle della diagonale principale non c'è la crocetta</td><td>Non sono contrassegnati i punti della bisettrice</td></tr>
</table>

Proprietà non riflessiva e non antiriflessiva

<table>
<tr>
<td>Una relazione R non riflessiva non è conseguentemente antiriflessiva.

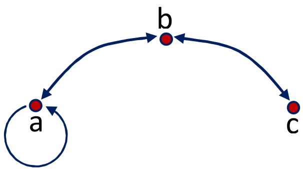
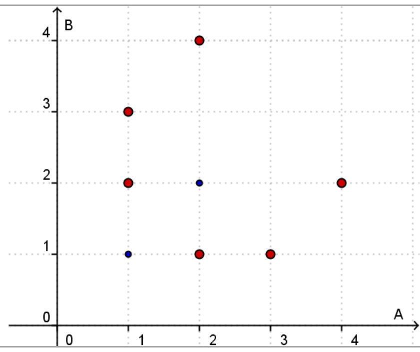
La relazione a lato non è né riflessiva né antiriflessiva.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Proprietà simmetrica

Una relazione R, definita in un insieme non vuoto A, è **simmetrica** se per ogni coppia di elementi $x, y \in A$ accade che, se x è in relazione con y allora anche y è in relazione con x. In simboli: $\forall\, x, y \in A\,,\quad se\ x\,R\,y \quad \Rightarrow \quad y\,R\,x\,.$

Esempi

La relazione R:"x è fratello di y" è simmetrica.
La relazione R:"x è figlio di y" non è simmetrica.

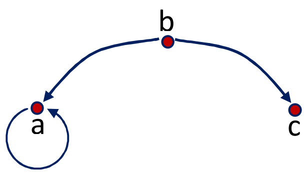
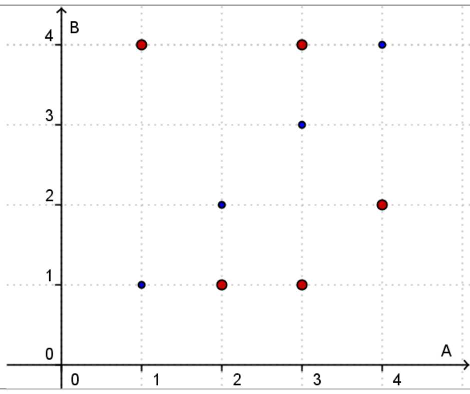
<table>
<tr><th colspan="3">Grafici della relazione simmetrica</th></tr>
<tr><th>Grafo</th><th>Tabella a doppia entrata</th><th>Diagramma cartesiano</th></tr>
<tr><td></td><td><table>
<tr><th>A\B</th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th></tr>
<tr><td>a</td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>b</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>d</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td>Ogni freccia è dotata di due punte</td><td>Per ogni cella contrassegnata, risulta contrassegnata la cella ad essa simmetrica rispetto alla diagonale p.</td><td>Per ogni punto contrassegnato, risulta anche contrassegnato il suo simmetrico rispetto alla bisettrice</td></tr>
</table>

Proprietà antisimmetrica

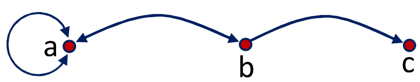
Una relazione R, definita in un insieme non vuoto A, è **antisimmetrica** se per ogni coppia di elementi diversi $x, y \in A$ accade che, se x è in relazione con y allora y non è in relazione con x.
In simboli: $\forall\, \boldsymbol{x, y \in A\ con\ x \neq y,\quad se\ x\,R\,y \quad \Rightarrow \quad y} \not{R}\, x\,.$

Esempi

La relazione R:"x è figlio di y" è antisimmetrica.
La relazione R:"x è fratello di y" non è antisimmetrica.

<table>
<tr><th colspan="3">Grafici della relazione antisimmetrica</th></tr>
<tr><th>Grafo</th><th>Tabella a doppia entrata</th><th>Diagramma cartesiano</th></tr>
<tr><td></td><td><table>
<tr><th>A\B</th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th></tr>
<tr><td>a</td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>b</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c</td><td></td><td>X</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>d</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td>Ogni freccia è dotata di una sola punta</td><td>Per ogni cella contrassegnata non risulta contrassegnata la cella ad essa simmetrica rispetto alla diagonale p.</td><td>Per ogni punto contrassegnato, non risulta contrassegnato il suo simmetrico rispetto alla bisettrice</td></tr>
</table>

Proprietà non simmetrica e non antisimmetrica

<table>
<tr><td>Una relazione non simmetrica non è conseguentemente antisimmetrica.
La relazione a lato non è né simmetrica né antisimmetrica.
Esempio: a ama b e b ama a; b ama c ma c non ama b.</td><td></td></tr>
</table>

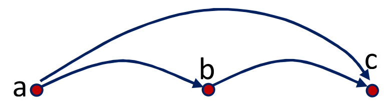
Proprietà transitiva

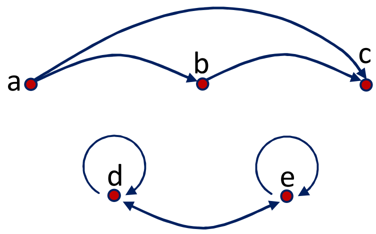
Una relazione R, definita in un insieme non vuoto A, è **transitiva** se per ogni terna di elementi $x, y, z \epsilon A$ accade che, se x è in relazione con y e y è in relazione con z, allora anche x è in relazione con z.
In simboli: $\forall\, x, y, z \in A\,,\quad se\; x\, R\, y \;\; \wedge \;\; y\, R\, z \quad \Rightarrow \quad x\, R\, z\,.$

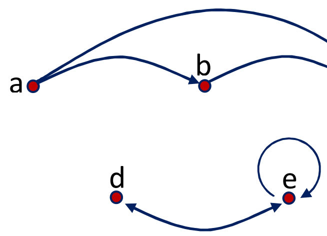
Esempi

La relazione R:"x è fratello di y" è transitiva.
La relazione R:"x è figlio di y" non è transitiva.

L'unica rappresentazione che da informazioni evidenti sulla transitività di una relazione è il grafo.

Grafo della proprietà transitiva	
Una relazione è transitiva se il suo grafo soddisfa le seguenti condizioni:	
1. ogni qualvolta che da un nodo **a** parte una freccia diretta verso un nodo **b** e da quest'ultimo parte un'altra freccia diretta verso un nodo **c**, allora deve esistere una freccia che parte dal primo nodo **a** diretta verso il terzo nodo **c**	
2. ogni qualvolta ci sono due nodi collegati da una freccia a due punte, entrambi i nodi devono essere dotati di cappio.	

Relazioni transitive	
	

Relazioni non transitive	
La relazione non è transitiva perché: $a\, R\, b$ e $b\, R\, c$ ma $a \not\mathrel{R} c$ Infatti la freccia non è diretta dal nodo **a** verso il nodo **c**	
La relazione non è transitiva perché: $d\, R\, e$ e $e\, R\, d$ ma $d \not\mathrel{R} d$	

Proprietà di connessione

Una relazione R, definita in un insieme non vuoto A, è **connessa** se comunque scelti due elementi distinti $x, y \in A$, accade che o $x\, R\, y$ oppure che $y\, R\, x$. In simboli: $\forall\, x, y \in A\,,\; con\;\; x \neq y \quad \Rightarrow \quad x\, R\, y \;\; \vee \;\; y\, R\, x\,.$

Grafo della proprietà di connessione
Ogni coppia di elementi distinti deve essere collegata da una freccia

Relazione di equivalenza

Una relazione R definita in un insieme non vuoto A, è una **relazione di equivalenza** se gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Esempio

La relazione R:"lo studente x appartiene alla stessa classe dello studente y" è una relazione di equivalenza.

Partizione

Dato un insieme A, si dice **partizione** di A, e si indica con P_A , la suddivisione dell'insieme A in sottoinsiemi così definita :

1. nessuno dei sottoinsiemi di A è vuoto;
2. tutti i sottoinsiemi di A sono, a due a due, disgiunti;
3. l'unione di tutti i sottoinsiemi S di A da l'insieme A .

Classe di equivalenza

In un insieme A in cui è assegnata una relazione di equivalenza R, si dice **classe di equivalenza** ogni sottoinsieme S non vuoto di A che gode delle seguenti proprietà :

1. gli elementi di S sono tutti tra loro equivalenti (rispetto alla relazione R);
2. ogni elemento di che non appartiene ad S non è equivalente ad alcun elemento di S.

Teorema

Ad ogni relazione di equivalenza R definita nell'insieme A, corrisponde una partizione di A in classi di equivalenza.

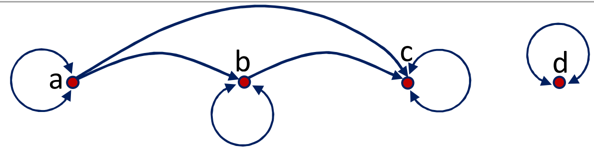
Insieme quoziente

Si chiama **insieme quoziente** di un insieme A, rispetto a una relazione di equivalenza R, e si indica con A/R l'insieme che ha per elementi le classi di equivalenza S di A , rispetto alla relazione R.

Relazioni d'ordine

Una relazione R in un insieme A è di ***ordine largo*** se è:

- riflessiva
- antisimmetrica
- transitiva



Ordine parziale largo

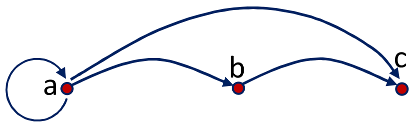
Una relazione R in un insieme A è di ***ordine stretto*** se è:

- antiriflessiva
- antisimmetrica
- transitiva

Ordine parziale stretto

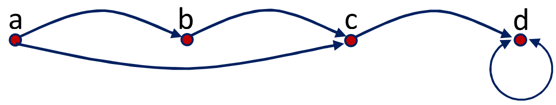
Una relazione R in un insieme A è di ***ordine totale*** se,

comunque scelti due elementi distinti x e y nell'insieme A, risulta sempre che x è in relazione con y oppure che y è in relazione con x.



Ordine totale né stretto né largo

Una relazione R che non è di ordine totale è detta di ***ordine parziale***. Una relazione R è di ***ordine parziale*** se esiste almeno una coppia di elementi distinti x e y nell'insieme A non confrontabili secondo la relazione.

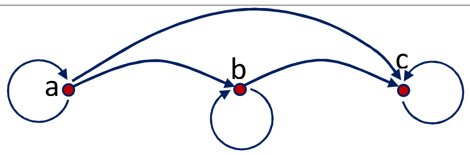


Ordine parziale né stretto né largo

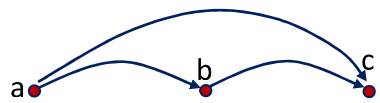
Nota

Se una relazione è d'ordine totale, gli elementi dell'insieme in cui è definita possono essere messi in fila lungo una retta, ordinandoli in senso crescente. Ciò non è possibile per le relazioni d'ordine parziale.

Esempi



Ordine totale largo



Ordine totale stretto

La relazione R:"x è fratello di y" non è una relazione d'ordine perché non vale la proprietà antisimmetrica.
La relazione R:"x è figlio di y" non è una relazione d'ordine perché non vale la proprietà transitiva.
La relazione R:"x è il quadrato di y" non è una relazione d'ordine perché non vale la proprietà transitiva.
La relazione R:"x è divisore di y" è una relazione d'ordine <u>parziale largo</u> nell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *perché ci sono coppie di elementi non confrontabili (3 non è divisore di 4 e 4 non è divisore di 3).*
La relazione R:"x è divisore di y" è una relazione d'ordine <u>totale largo</u> nell'insieme $A = \{1, 2, 4, 8\}$.
La relazione R:"x è più giovane di y" è una relazione d'ordine <u>parziale stretto</u> perché può succedere che due persone diverse abbiano la stessa ètà, e che quindi non sia vero che x sia più giovane di y né che y sia più giovane di x.
La relazione R:"x è minore di y" è una relazione d'ordine <u>totale stretto</u> nell'insieme dei numeri naturali.
La relazione R:"x è minore o uguale a y" è una relazione d'ordine <u>totale largo</u> nell'insieme dei numeri naturali.

Esempi di riepilogo

Relazione	*Dominio*	*Riflessiva*	*Simmetrica*	*Antisimmetrica*	*Transitiva*	*Connessa*
y = x + 3	N – Z – Q – R	No	No	Si	No	No
y è triplo di x	N	No	No	Si	No	No
x è padre di y	Cittadini di una città	No	No	Si	No	No
x = y	N	Si	Si	Si	Si	No
x divide y	Z	Si	No	No (*)	Si	No
x è multiplo di y	Z	Si	No	No (*)	Si	No
x divide y	N	Si	No	Si (*)	Si	No
x è multiplo di y	N	Si	No	Si (*)	Si	No
x è simile a y	Piano Euclideo	Si	Si	No	Si	No
x è parallela a y	Piano Euclideo	Si	Si	No	Si	No
x è incidente a y	Piano Euclideo	No	Si	No	No	No
x è perpendicolare a y	Piano Euclideo	No	Si	No	No	No
$x \neq y$	N - Z - Q – R	No	Si	No	Si	No
$x < y$	N – Z – Q – R	No	No	Si	Si	Si
$x \leq y$	N – Z – Q – R	Si	No	Si	Si	Si
$x \subseteq y$	P (A)	Si	No	Si	Si	No
$x \subset y$	P (A)	No	No	Si	Si	No
$x \subseteq y$	$A = \{A\}$ $P(A) = \{\emptyset, A\}$	Si	No	Si	Si	Si
$x \subset y$	$A = \{A\}$ $P(A) = \{\emptyset, A\}$	No	No	Si	Si	Si
x è primo con y	N	No	Si	No	Si	No
x + y è pari	N	Si	Si	No	Si	No
Identità		Si	Si	Si	Si	No
Totale		Si	Si	No	Si	Si
Vuota		No	Si	Si	Si	No

Nota (*)

Nell'insieme Z ("x divide y" e "y divide x") non implica che (x = y).
Infatti (+4 divide -4 e -4 divide +4) non implica che (-4 = +4).
Nell'insieme N ("x divide y" e "y divide x") implica che (x = y).
Infatti (+3 divide +3 e +3 divide +3) implica che (+3 = +3).