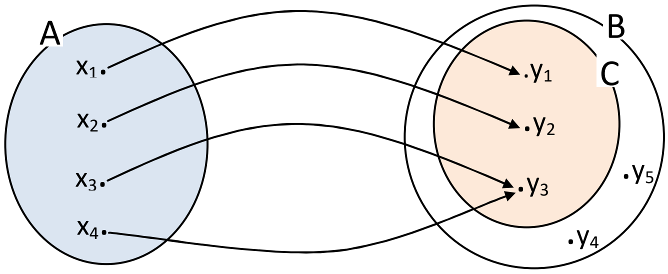
FUNZIONI

Funzioni

Una **funzione** è una relazione fra due insiemi non vuoti A e B, che associa ad ogni elemento $x \in A$ uno e un solo elemento $y \in B$. In simboli si scrive: $y = f(x)$ oppure $f : A \longrightarrow B$.



Esempio

Siano $A = \{x \ / \ x \text{ è } uno\ studente\ del\ Liceo\ di\ Trebisacce\}$ *e* $B = \{y \ / \ y \text{ è } una\ \ regione\ italiana\}$
La relazione R:"lo studente x è nato nella regione y" è una funzione da A in B.

L'elemento y è detto **immagine** di x . L'elemento x è detto **controimmagine** di y.

Il **dominio** o insieme di definizione di una funzione f, è l'insieme di partenza A formato da tutti gli elementi $x \in A$ che hanno un'immagine $y \in B$. In simboli $D = \{x \in A \ / \ y = f(x) \ \ \wedge \ \ y \in B\}$.

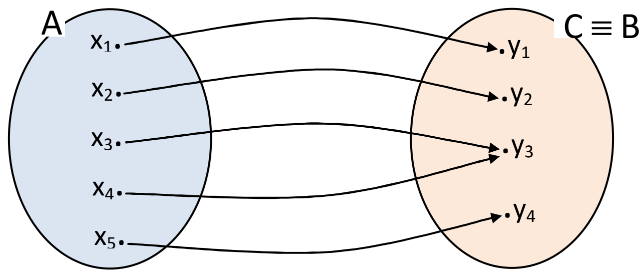
Il **codominio** o insieme immagine di una funzione f, è il sottoinsieme C dell'insieme di arrivo B costituito da tutti gli elementi y $\in$ B che sono immagini di almeno un elemento $x \in A$. In simboli $C = \{y \in B \ / \ y = f(x) \ \ \wedge \ \ x \in A\}$.

<table>
<tr><td>

Funzione suriettiva

Una funzione da A a B è suriettiva quando ogni elemento dell'insieme di arrivo B è immagine di almeno un elemento del dominio A.

</td><td>



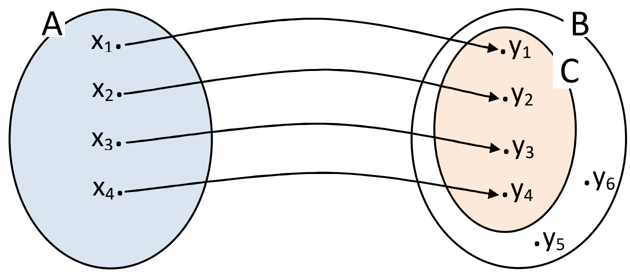
Su ogni elemento di B arriva almeno una freccia

</td></tr>
<tr><td>

Funzione iniettiva

Una funzione da A a B è iniettiva quando ogni elemento dell'insieme di arrivo B è immagine al più di un elemento del dominio A.

</td><td>



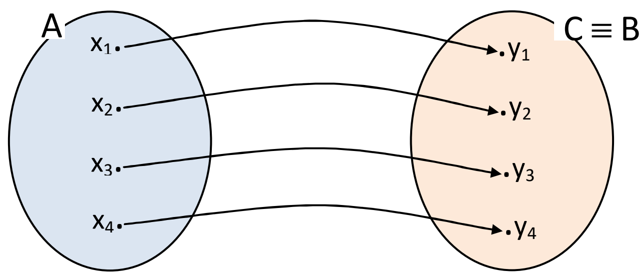
Su ogni elemento di B arriva al più una freccia

</td></tr>
<tr><td>

Funzione biunivoca (o biettiva)

Una funzione da A a B è biunivoca quando è sia iniettiva sia suriettiva.

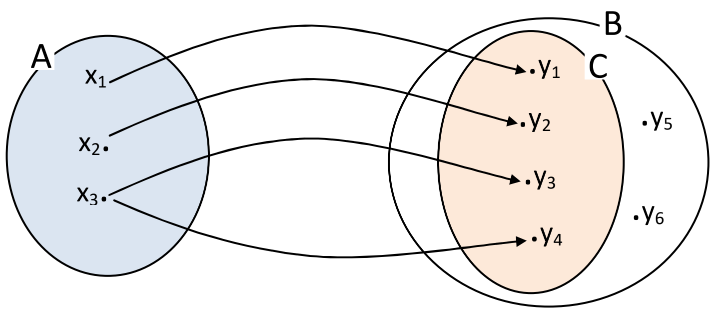
</td><td>



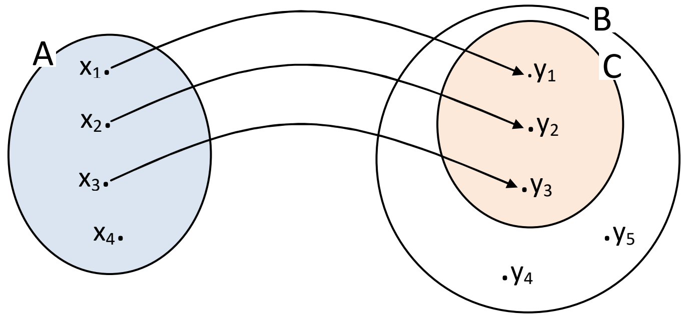
Su ogni elemento di B arriva una e una sola freccia

</td></tr>
</table>

Esempi



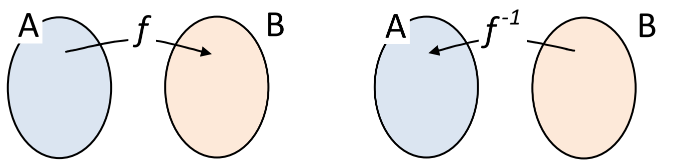
Non è una funzione
perché all'elemento $x_3 \in A$ corrispondono i due elementi $y_3, y_4 \in B$



Non è una funzione
perché all'elemento $x_4 \in A$ non corrisponde alcun elemento $y \in B$

Funzione inversa

Se $f : A \longrightarrow B$ è una funzione biunivoca, allora esiste la funzione inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$ che ad ogni $y \in B$ associa uno e un solo $x \in A$ tale che $y = f(x)$.



Funzioni empiriche e matematiche

Una **funzione numerica** è una funzione definita fra due insiemi numerici.

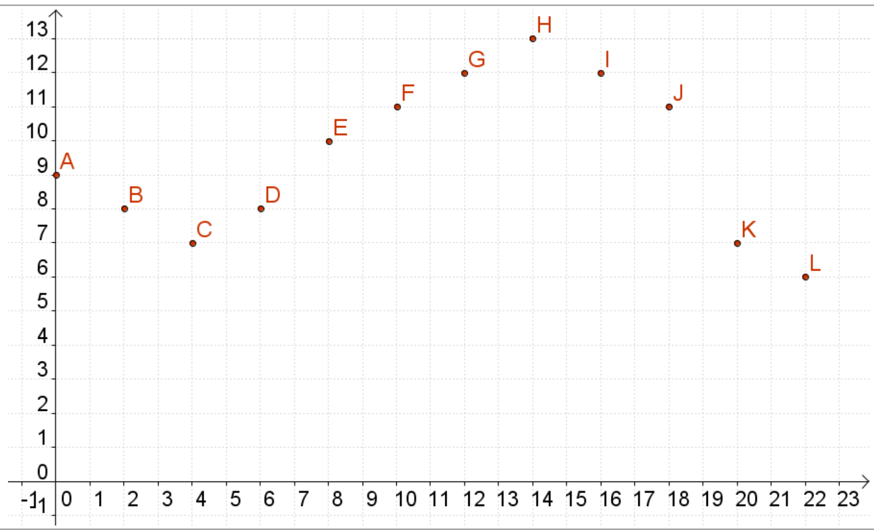
Una **funzione matematica** è una funzione in cui l'immagine $y \in B$ di un elemento $x \in A$ è ottenibile per mezzo di una formula matematica.

Una **funzione empirica** è una funzione in cui l'immagine $y \in B$ di un elemento $x \in A$ non è ottenibile per mezzo di una formula matematica. L'immagine $y \in B$ di un elemento $x \in A$ si ricava per mezzo di misurazioni sperimentali o di rilevazioni (ad esempio: in fisica, in chimica, in economia, in statistica, …).

Esempio di funzione empirica

La rilevazione delle temperature registrate ogni due ore dalla stazione meteorologica di Trebisacce in una giornata è un esempio di funzione empirica.

Ora (h)	Temperatura (°C)
0	9
2	8
4	7
6	8
8	10
10	11
12	12
14	13
16	12
18	11
20	7
22	6



Il dominio è l'insieme $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 19, 20, 22\}$.
Il codominio è l'insieme $C = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$.

Funzione reale di variabile reale

Una **funzione reale di variabile reale** è una funzione che ha per dominio e codominio sottoinsiemi dei numeri reali.

Una funzione reale di variabile reale è definita tramite la sua espressione analitica $\boldsymbol{y = f(x)}$.

La variabile $\boldsymbol{x}$ è detta **variabile indipendente**. La variabile $\boldsymbol{y}$ è detta **variabile dipendente**.

Il **Dominio** di una funzione reale di variabile reale è l'insieme dei numeri reali per cui le operazioni che compaiono nella sua espressione analitica si possono eseguire.

Il **Codominio** di una funzione reale di variabile reale è l'insieme dei valori reali assunti dalla variabile dipendente y.

Esempi

La funzione $y = 2x + 1$ *ha per dominio l'insieme* R .

La funzione $y = \frac{2x+1}{x-3}$ *ha per dominio l'insieme* $R - \{3\}$.

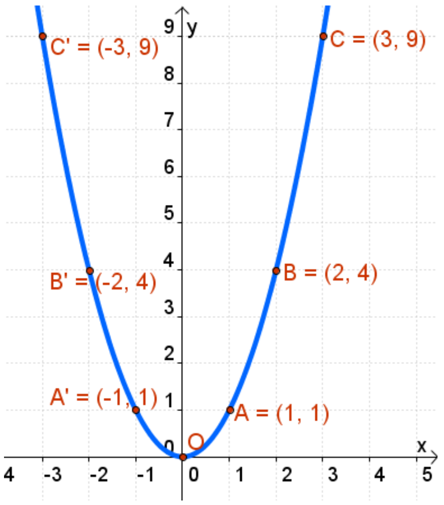
La funzione $y = \sqrt[2]{x} + 3x$ *ha per dominio l'insieme* $D = \{x \in R \ / \ x \geq 0\}$.

Il **grafico cartesiano** di una funzione $y = f(x)$ è l'insieme di tutti i punti del piano cartesiano le cui coordinate $(x; y)$ verificano l'equazione della funzione $y = f(x)$.

Esempio

Il grafico cartesiano della funzione $y = x^2$ è rappresentato a lato.

Punto	x	y
O	0	0
A	1	1
A′	-1	1
B	2	4
B′	-2	4
C	3	9
C′	-3	9

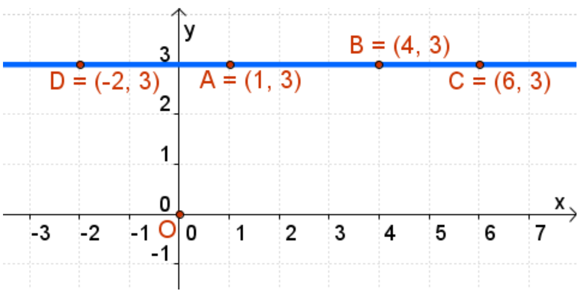
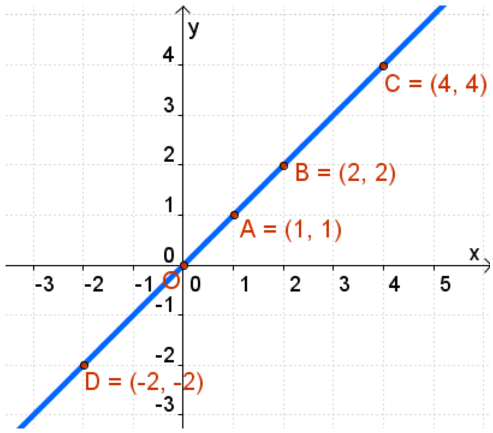


Funzioni notevoli

Una funzione $f : A \longrightarrow B$ si dice **costante**, se il codominio $f \ \ A$ è costituito da un solo elemento.

Una funzione $f : A \longrightarrow A$ è una **identità**, e si indica I_A se ad ogni elemento $x \in A$ associa l'elemento stesso $x \in A$.

Esempi

La funzione $y = 5$ *è costante.* *Per ogni valore di* x*, risulta* $f(x) = 5$.	*La funzione* $y = x$ *è un'identità.* *Per ogni valore di* x*, risulta* $f(x) = x$.
	

Funzione della proporzionalità diretta

La funzione di proporzionalità diretta è una funzione del tipo $\boldsymbol{y = kx}$ $(k \neq 0)$ oppure $\frac{y}{x} = k$

Il grafico cartesiano della funzione $y = kx$ è una retta passante per l'origine degli assi cartesiani.

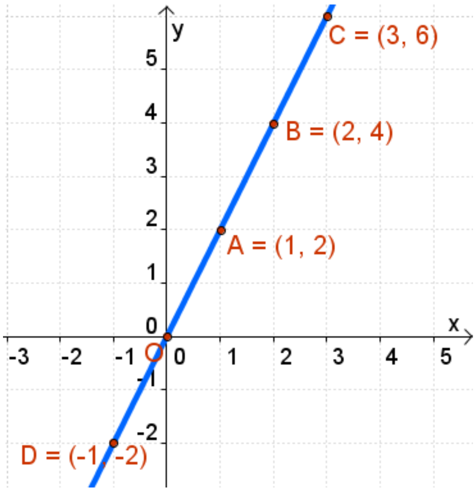
Le variabili x e y legate da una funzione di proporzionalità diretta si dicono ***direttamente proporzionali****.*

Due variabili direttamente proporzionali hanno rapporto costante.

Esempio

$$y = 2x$$

x	y
-1	-2
0	0
1	2
2	4
3	6



Funzione della proporzionalità inversa

La funzione di proporzionalità inversa è una funzione del tipo $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$ $(k \neq 0)$ oppure $x \cdot y = k$

Il grafico cartesiano della funzione $y = \frac{k}{x}$ è una iperbole equilatera.

Le variabili x e y legate da una funzione di proporzionalità inversa si dicono ***inversamente proporzionali****.*

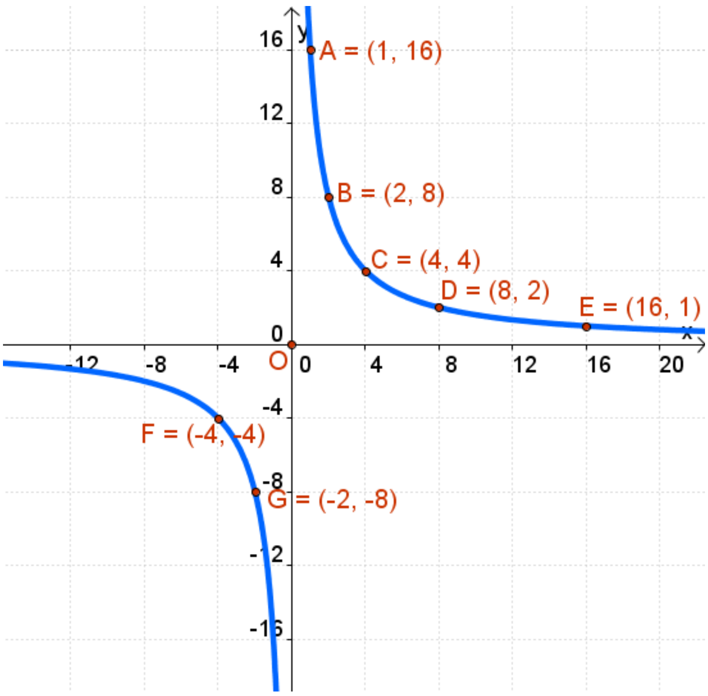
Due variabili inversamente proporzionali hanno prodotto costante.

Se $k > 0$ il grafico si trova nel I e III quadrante. Se $k < 0$ il grafico si trova nel II e IV quadrante.

Esempio

$$y = \frac{16}{x}$$

x	y
-16	-1
-8	-2
-4	-4
-2	-8
1	16
2	8
4	4
8	2
16	1



Funzione della proporzionalità quadratica

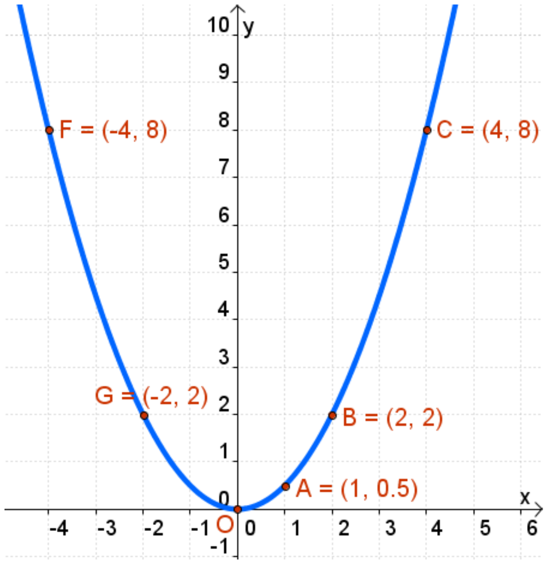
Una funzione di proporzionalità quadratica è una funzione del tipo $\boldsymbol{y = ax^2}$ $\quad (a \in R)$

Il grafico di $y = ax^2$ è una parabola con il vertice nell'origine degli assi. Se $a < 0$ il grafico ha la concavità rivolta verso il basso.

Esempio

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

x	y
0	0
1	1/2
2	2
4	8
-2	2
-4	8



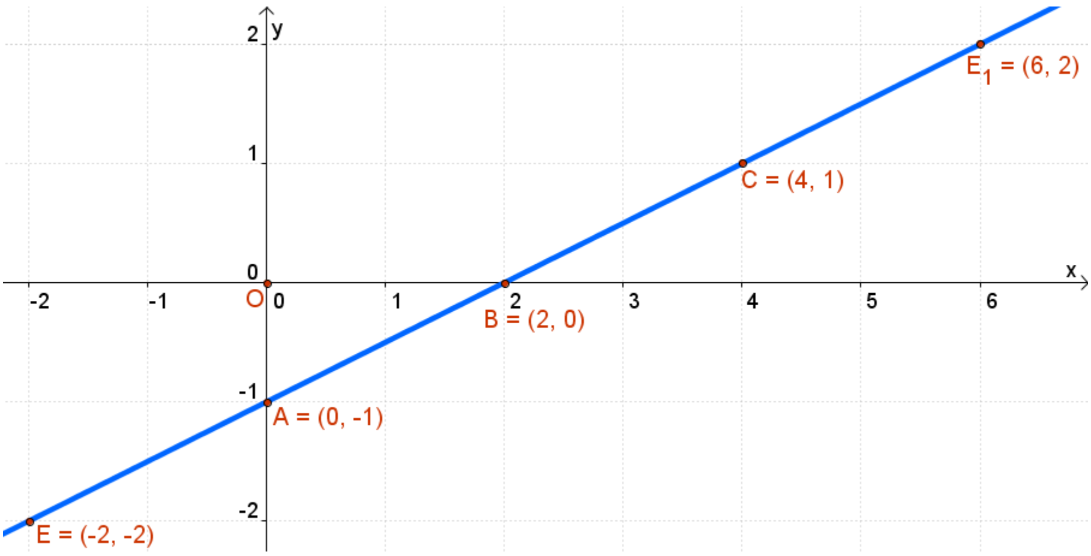
Funzione lineare

Una funzione lineare è una funzione del tipo $\boldsymbol{y = ax + b}$ $\quad (a, b \in R)$

Esempio

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

x	y
-2	-2
0	-1
2	0
4	1
6	2



Osservazione

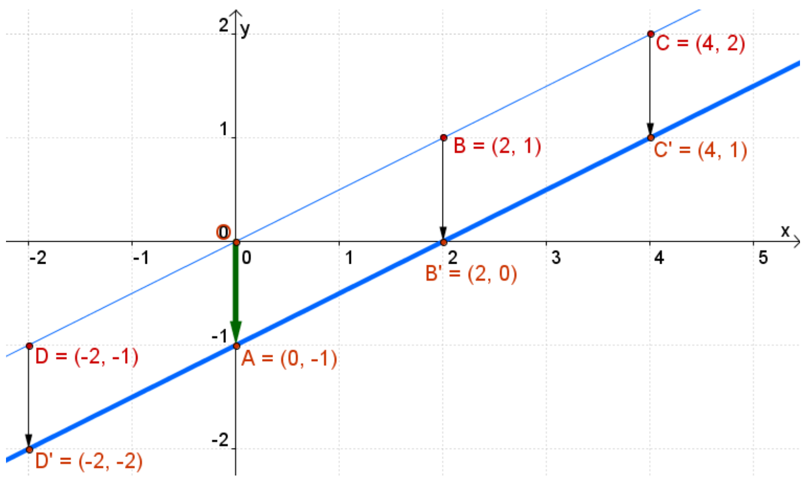
La funzione lineare $y = \frac{1}{2}x - 1$ è la traslazione della funzione di proporzionalità diretta $y = \frac{1}{2}x$ di vettore $\vec{v}(0, -1)$.

Le equazioni della traslazione sono:

$$\begin{cases} x' = x + 0 \\ y' = y - 1 \end{cases}.$$

Applicando le formule inverse: $\begin{cases} x = x' + 0 \\ y = y' + 1 \end{cases}$ *si ottiene:* $y' + 1 = \frac{1}{2}x'$;

$$y' = \frac{1}{2}x' - 1.$$



Funzione quadratica

Una funzione quadratica è una funzione del tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ $\quad (a, b, c \in R)$

Per tracciare il grafico della funzione conviene determinare l'ascissa del vertice $x_V = -\frac{b}{2a}$ *e le coordinate di alcuni punti a sinistra e a destra del vertice.*

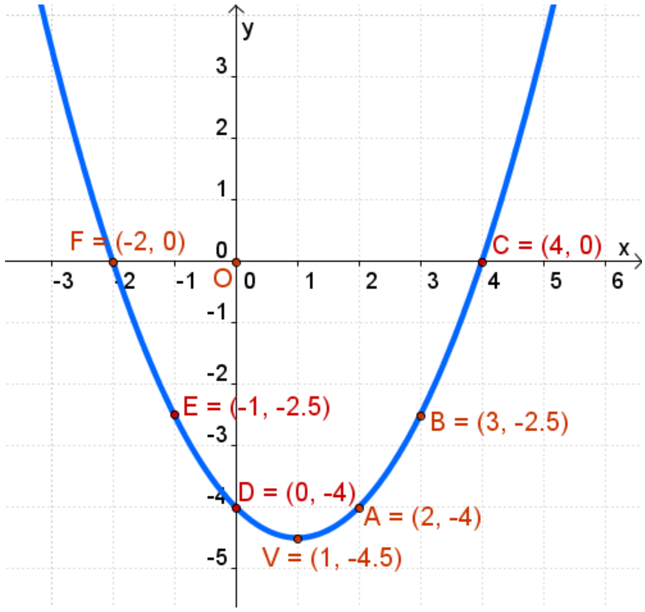
Se $a < 0$ il grafico ha la concavità rivolta verso il basso.

Esempio

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$$

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$$

P	x	y
V	1	$-9/2$
A	2	-4
B	3	$-5/2$
C	4	0
D	0	-4
E	-1	$-5/2$
F	-2	0



Funzione omografica

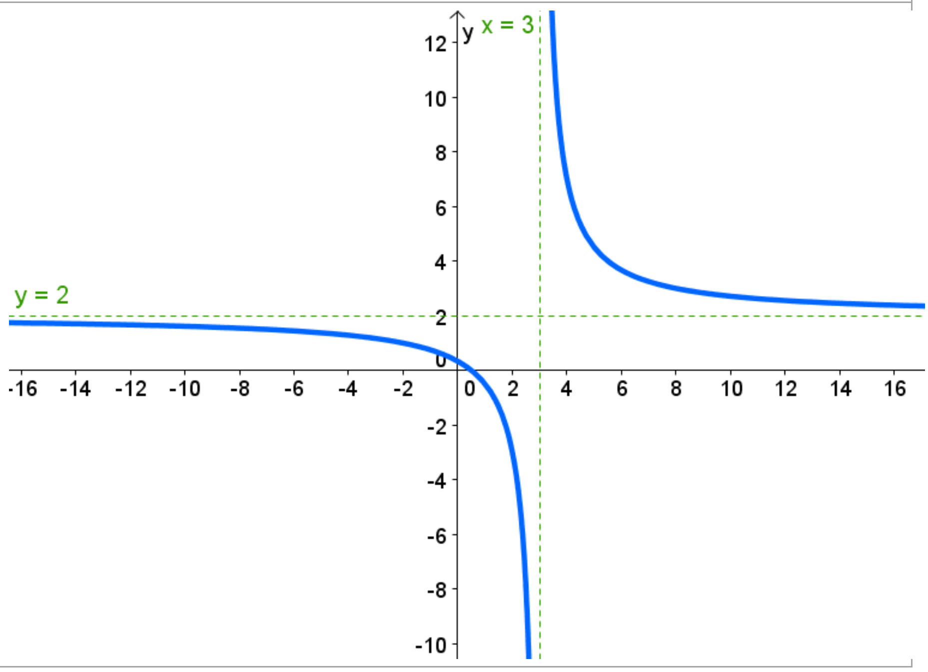
La funzione omografica è una funzione del tipo $\boldsymbol{y = \frac{ax+b}{cx+d}}$ $\qquad$ *con* $c \neq 0 \quad \wedge \quad ad \neq bc$

Le rette $cx + d = 0$ *e* $y = \frac{a}{c}$ *sono gli asintoti della curva.*

Esempio

$$y = \frac{2x - 1}{x - 3}$$

x	y
5	$9/2$
10	$19/7$
15	$29/12$
2	-3
0	$1/3$
-5	$11/8$
-10	$21/13$



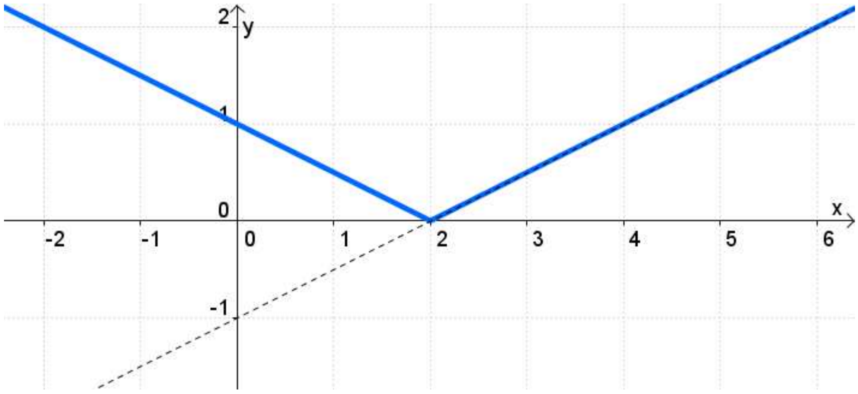
Funzione valore assoluto

Il grafico di $y = |f(x)|$ si ottiene simmetrizzando, rispetto all'asse x, la parte del grafico di $f(x)$ che si trova sotto l'asse x.

Esempio

$$y = \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$$

x	y
2	0
4	1



Funzione valore assoluto

Il grafico di $y = f(|x|)$ si ottiene operando nel seguente modo:

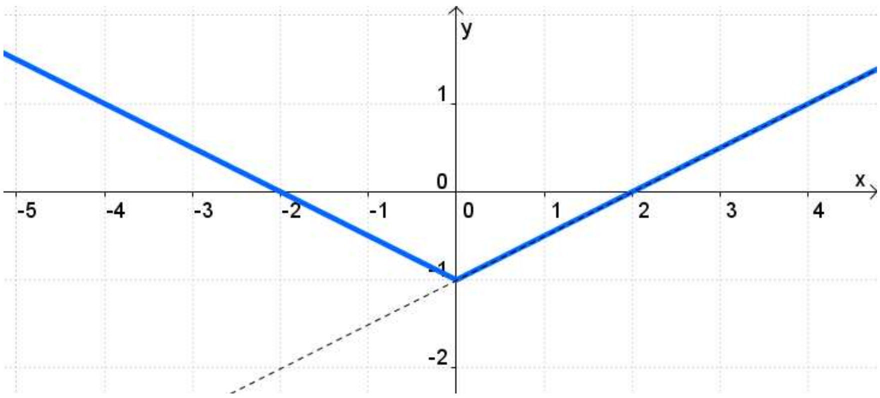
nel semipiano $x \geq 0$ $\longmapsto$ il grafico $f(x)$ non subisce modifiche;

nel semipiano $x < 0$ $\longmapsto$ il grafico è il simmetrico, rispetto all'asse y, del grafico di $f(x)$ che si trova nel semipiano $x > 0$.

Esempio

$$y = \frac{1}{2}|x| - 1$$

x	y
2	0
4	1

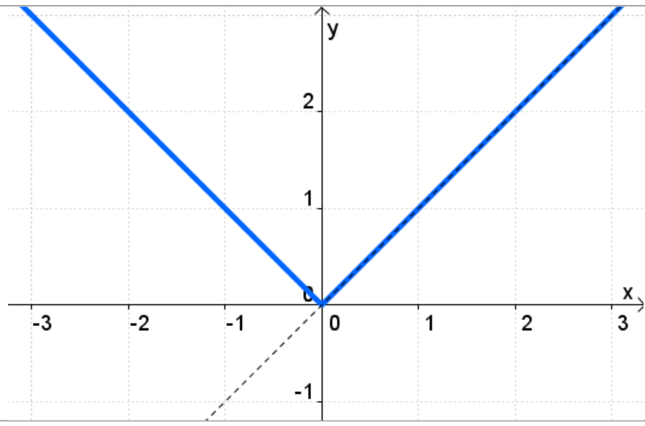


Funzione valore assoluto

Il grafico di $y = |x|$ si ottiene operando con uno dei due metodi precedenti:

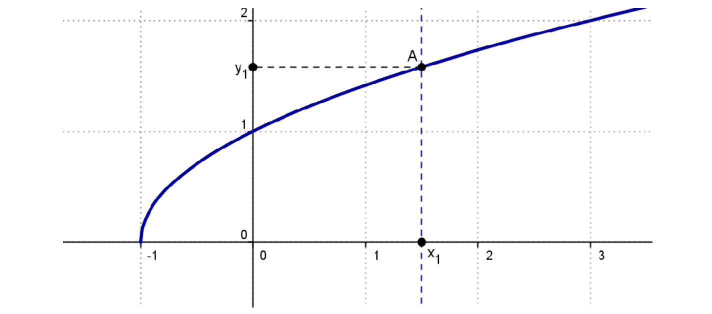
$$y = |x|$$

x	y
0	0
3	3
-3	-3

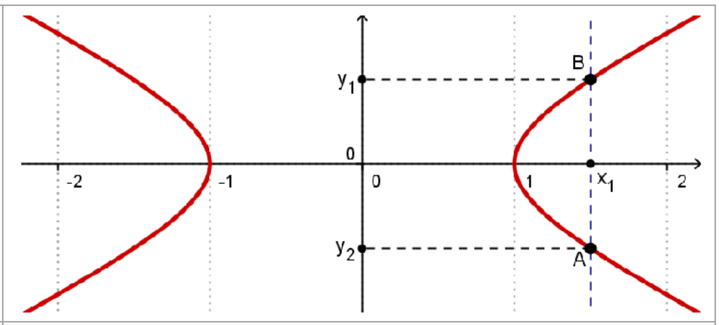


Riconoscimento di una funzione

Il grafico di una **funzione**, è intersecato da una qualsiasi retta verticale al massimo in un punto.



$f : [-1, +\infty[\longrightarrow R$ è una funzione



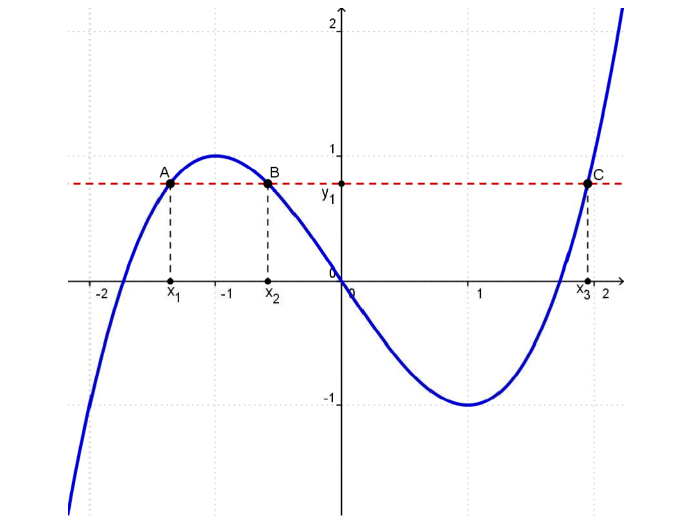
Non è una funzione

Riconoscimento del tipo di funzione

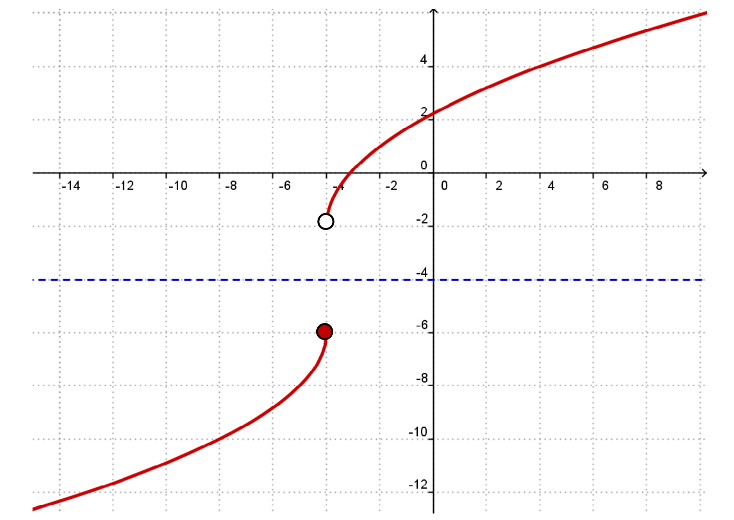
Il grafico di una **funzione suriettiva** $f : R \longrightarrow R$ è intersecato da una qualsiasi retta orizzontale almeno in un punto.

Il grafico di una **funzione iniettiva** $f : R \longrightarrow R$ è intersecato da una qualsiasi retta orizzontale al massimo in un punto

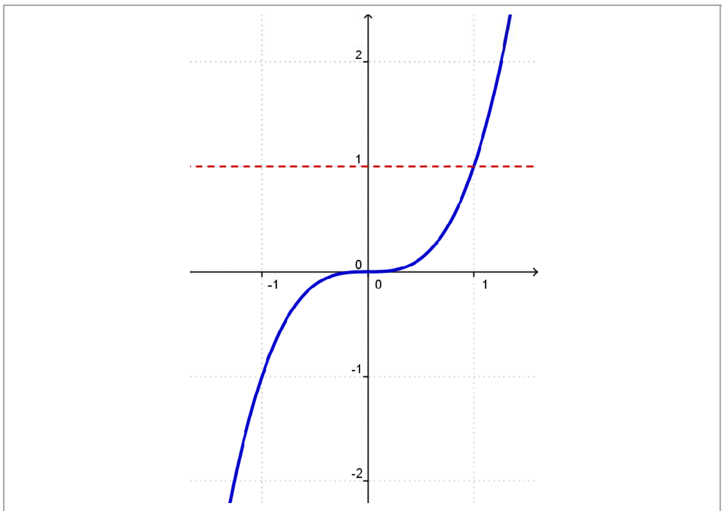
Il grafico di una **funzione biunivoca** $f : R \longrightarrow R$ è intersecato da una qualsiasi retta orizzontale in un solo punto.



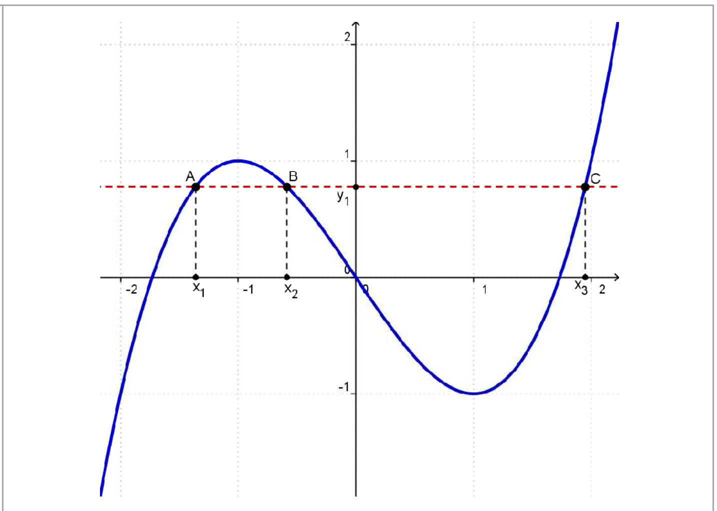
$f : R \longrightarrow R$ è una funzione suriettiva, ma non iniettiva



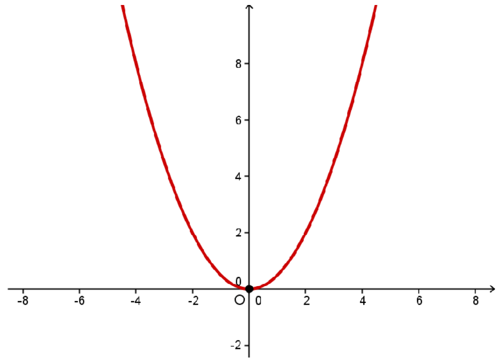
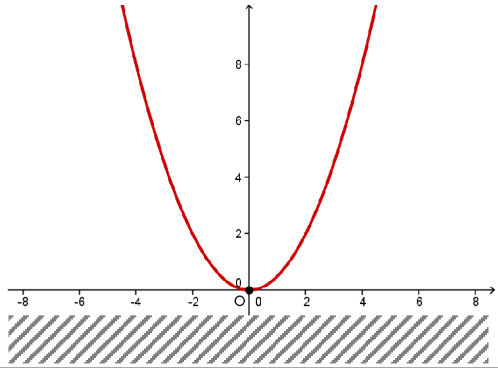
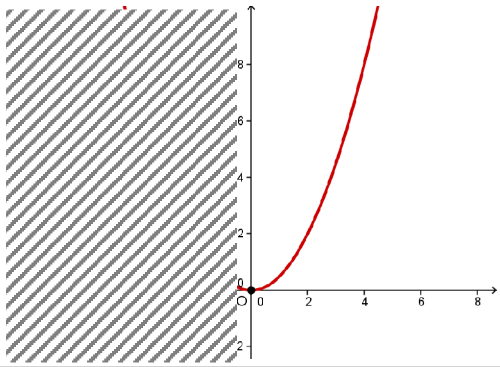
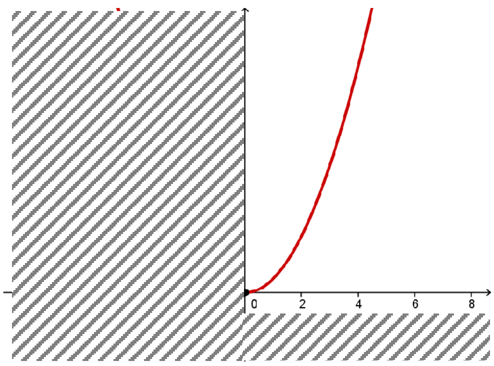
$f : R \longrightarrow R$ è una funzione iniettiva, ma non suriettiva



$f : R \longrightarrow R$ è una funzione biunivoca



$f : R \longrightarrow R$ non è una funzione biunivoca

La funzione $f\,:R \longrightarrow R$ definita da $y = x^2$ non è né iniettiva, nè suriettiva.	
La funzione $f\,:R \longrightarrow R^+$ definita da $y = x^2$ è suriettiva, ma non è iniettiva.	
La funzione $f\,:R^+ \longrightarrow R$ definita da $y = x^2$ è iniettiva, ma non è suriettiva.	
La funzione $f\,:R^+ \longrightarrow R^+$ definita da $y = x^2$ è biunivoca.	

Funzione inversa

Data una funzione biunivoca f, il grafico della funzione inversa f^{-1} si ottiene simmetrizzando il grafico della funzione f rispetto alla bisettrice del I° e III° quadrante.

Esempio 1

La funzione lineare $y = ax + b$ è una funzione biunivoca $\forall x \in R$. Pertanto esiste la sua funzione inversa.

$y = 2x + 4$

Determiniamo la funzione inversa:

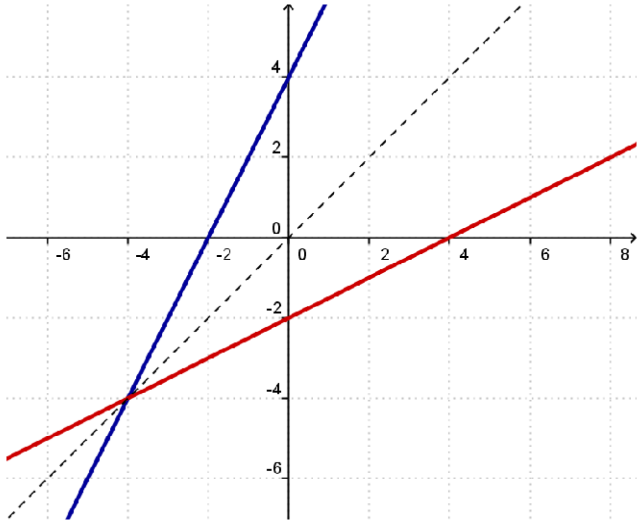
$-2x = -y + 4$

$2x = y - 4$

$x = \frac{1}{2}y - 2$

Per disegnarla nello stesso piano cartesiano occorre scambiare le variabili. Si ottiene pertanto:

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$



Esempio 2

La funzione $y = ax^2$ considerata come funzione $f : R^+ \longrightarrow R^+$ è una funzione biunivoca.

Pertanto esiste la sua funzione inversa.

$y = x^2$

Determiniamo la funzione inversa:

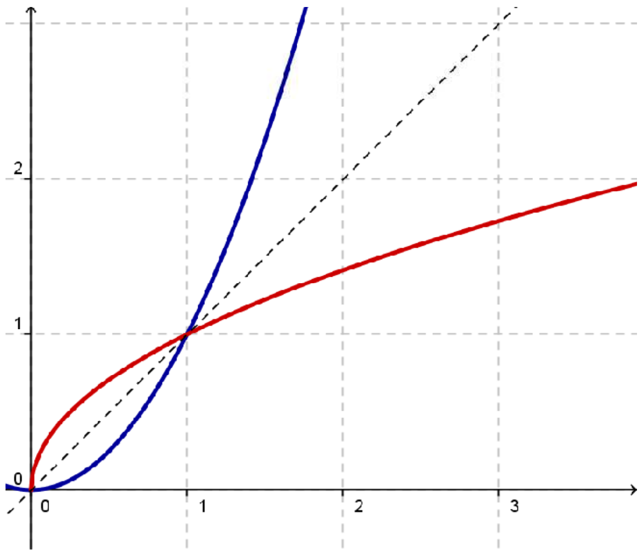
$-x^2 = -y$

$x^2 = y$

$x = \sqrt{y}$ con $y \geq 0$

Per disegnarla nello stesso piano cartesiano occorre scambiare le variabili. Si ottiene pertanto:

$$y = \sqrt{x}$$



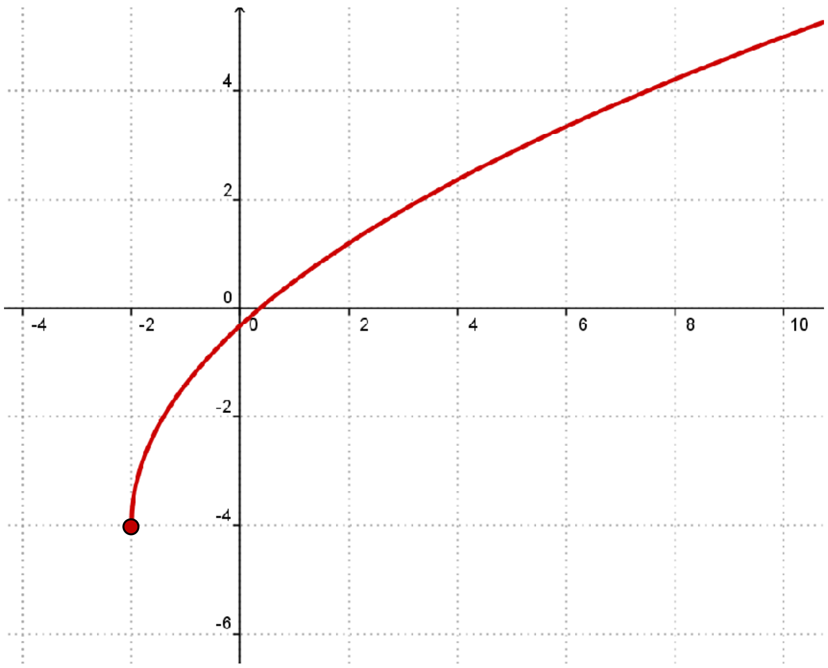
Dominio e codominio di una funzione

Il Dominio di una funzione è costituito da tutti i punti dell'asse x per i quali esiste il grafico della funzione.

Il Codominio di una funzione è costituito da tutti i punti dell'asse y per i quali esiste il grafico della funzione.

$$D \ = \ \{x \in R \ / \ \ x \geq -2\} \ = \ [-2\,,+\infty[$$

$$C \ = \ \{y \in R \ / \ \ y \geq -4\} \ = \ [-4\,,+\infty[$$



$$D = \left\{x \in R \ / \ \ x < -4\,;\, -2 \leq x \leq \frac{3}{2}\right\} \ =$$
$$= \ ]-\infty\,,-4] \quad \cup \quad \left[-2\,,+\frac{3}{2}\right]$$

$$C = \{y \in R \ / \ x \leq -3\,;\; -1 \leq y \leq 3\} \ =$$
$$= \ ]-\infty\,,-4[\quad \cup \quad \left[-2\,,+\frac{3}{2}\right]$$