MATRICI

Definizione

Una **matrice** $r \times c$ è una tabella di numeri (o espressioni letterali) disposti su r righe e su c colonne.

Esempi

Matrice 2 x 2 *(2 righe x 2 colonne)*	**Matrice 2 x 3** *(2 righe x 3 colonne)*	**Matrice 3 x 3** *(3 righe x 3 colonne)*
$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} k & 3 & 4 \\ 3 & 2k & 8 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Un generico elemento di una matrice è indicato con il simbolo $a_{i\,k}$.

Esempio

Nella matrice B dell'esempio precedente si ha: $a_{1\,1} = 2 \qquad a_{1\,2} = 3 \qquad a_{1\,3} = 4 \qquad a_{2\,1} = 1 \qquad a_{2\,2} = 5$.

Definizioni

Una matrice formata da una sola colonna è detta ***matrice colonna***.
Una matrice formata da una sola riga è detta ***matrice riga***.
Una matrice i cui elementi sono tutti nulli è detta ***matrice nulla***.
Una matrice avente lo stesso numero di righe e di colonne è detta ***matrice quadrata***. Il numero comune di righe e colonne è detto ***ordine*** della matrice.
In una matrice quadrata la ***diagonale principale*** è l'insieme degli elementi: $a_{1\,1}$, $a_{2\,2}$, $a_{3\,3}$, ...
Una matrice quadrata avente tutti gli elementi della diagonale principale uguali a 1 e tutti gli altri uguali a zero è detta ***matrice identica*** o ***matrice unità***.

Esempi

Matrice nulla	Matrice identica	Matrice colonna	Matrice riga
$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$F = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$G = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

Definizione

La matrice **trasposta** di una matrice A è la matrice che si ottiene scambiando le righe con le colonne della matrice A.

Una matrice si dice **simmetrica** se coincide con la sua trasposta.

Esempi

Matrice A	Matrice trasposta
$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$	$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

Matrice simmetrica
$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Operazioni

Addizione di due matrici

Date due matrici A e B di uguali dimensioni $r \times c$, la matrice somma $A + B$ è la matrice che ha come elementi le somme degli elementi di uguale posto.

Esempio

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 7 & -9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 3-4 & 4+2 \\ 3+2 & 6+7 & 8+3 \\ 1+7 & 5-9 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 5 & 13 & 11 \\ 8 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Sottrazione di due matrici

Date due matrici A e B di uguali dimensioni $r \times c$, la matrice differenza $A - B$ è la matrice che ha come elementi le differenze degli elementi di uguale posto.

Esempio

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 7 & -9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 3-(-4) & 4-2 \\ 3-2 & 6-7 & 8-3 \\ 1-7 & 5-(-9) & 6-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ -6 & 14 & 5 \end{bmatrix}$$

Moltiplicazione di una matrice per un numero reale

Data una matrice A e un numero reale k, la matrice prodotto $k \cdot A$ è la matrice ottenuta moltiplicando ciascun elemento della matrice per il numero reale k .

Esempio

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 7 \\ 8 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot(-2) & 2\cdot 7 \\ 2\cdot 8 & 2\cdot 5 & 2\cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & -4 & 14 \\ 16 & 10 & 18 \end{bmatrix}$$

Moltiplicazione di due matrici

Data una matrice A di dimensione $a \times b$ e una matrice B di dimensione $b \times c$, la matrice prodotto è la matrice $A \times B$ di dimensione $a \times c$, il cui generico elemento $a_{i\,k}$ si ottiene moltiplicando ciascun elemento della riga i della matrice A per l'elemento di uguale posto della colonna k della matrice B e sommando i prodotti ottenuti.

Esempio

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 7 + 2\cdot 9 + 3\cdot(-2) & 1\cdot 8 + 2\cdot(-1) + 3\cdot(-3) \\ 4\cdot 7 + 5\cdot 9 + 6\cdot(-2) & 4\cdot 8 + 5\cdot(-1) + 6\cdot(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -3 \\ 61 & 9 \end{bmatrix}$$

Determinante di una matrice quadrata di ordine 2

Data una matrice quadrata A di ordine 2 : $\quad A = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} \end{bmatrix}$

Il determinante della matrice A è il numero reale $\det A = a_{1\,1} \cdot a_{2\,2} - a_{2\,1} \cdot a_{1\,2}$

Esempio

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$,

il determinante della matrice A è $det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 20 - 6 = 14$.

Nota

Le seguenti scritture sono equivalenti: $\det A = |A| = det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

Determinante di una matrice quadrata di ordine 3

Data una matrice quadrata A di ordine 3 : $A = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} \end{bmatrix}$

Il determinante della matrice A è il numero reale

$$det\ A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

Regola di Sarrus

Per ricordare tale formula è conveniente utilizzare il seguente procedimento, denominato regola di Sarrus:

1. si ricopiano le prime due colonne a destra della matrice
2. si esegue la differenza fra la somma dei prodotti delle tre diagonali discendenti e la somma delle tre diagonali ascendenti

Esempio

Data la matrice quadrata A di ordine 3 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

si ha: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix}$

$$|A| \ = \ (1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8) - (7 \cdot 5 \cdot 3 + 8 \cdot 6 \cdot 1 + 9 \cdot 4 \cdot 2) = (45 + 84 + 96) - (105 + 48 + 72) \ = \ 0$$

Matrice inversa

Una matrice quadrata $\boldsymbol{A}$ si dice ***invertibile*** se esiste una matrice quadrata $\boldsymbol{A^{-1}}$ dello stesso ordine, detta matrice inversa di $\boldsymbol{A}$, tale che $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A^{-1}} = \boldsymbol{A^{-1}} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$, essendo $\boldsymbol{I}$ la matrice unità.

Teorema

Una matrice $\boldsymbol{A}$ di ordine $\boldsymbol{n}$ è ***invertibile*** se e solo se il suo determinante è diverso da zero.

La matrice inversa della matrice A è la matrice $A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \cdot C^T$ dove C^T è la Trasposta della matrice C, i cui elementi sono i complementi algebrici degli elementi della matrice A.

Esempio

Determiniamo la matrice inversa della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Verifichiamo innanzitutto che è invertibile, calcolando il suo determinante.

$det\ (A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & +2 \\ 0 & 0 \end{matrix} = 0 + 0 + 0 - (0 + 2 + 0) = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow$ la matrice è invertibile.

Calcoliamo i complementi algebrici della matrice A.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$ $\qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = +3$ $\qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$ $\qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$ $\qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$

La matrice C è : $\quad C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

La trasposta della matrice C è : $\quad C^T = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Pertanto la matrice inversa della matrice A è :

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ (A)} \cdot C^T = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$