

Logica

1. Un pò di storia

Il primo studioso che si occupò di logica fu il filosofo greco **Aristotele** (384-322 a.C.). Fino al Cinquecento la logica restò sostanzialmente entro i confini tracciati da Aristotele; la preoccupazione fu soprattutto quella di preservarne, tradurne e approfondirne i testi.

Nonostante gli innovativi studi svolti nella seconda metà del Seicento dal filosofo e scienziato tedesco **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716), i manuali di logica su cui George Boole studiarono i filosofi del Settecento e degli inizi dell'Ottocento rimasero semplici rielaborazioni della logica aristotelica.

Un notevole passo avanti negli studi di logica fu dovuto al matematico inglese **George Boole** (1815-1864), che sviluppò le idee di Leibniz: Boole trattò le proposizioni con simboli algebrici e sviluppò una vera e propria "algebra" delle proposizioni (algebra di Boole), che ha trovato sorprendenti applicazioni nella progettazione dei circuiti elettrici.

Nel Novecento, un risultato di fondamentale importanza nel campo della logica fu il cosiddetto teorema dell'incompletezza (1931), dimostrato da **Kurt Gödel** (1906-1978), matematico di origine ceca: esso esprime, a grandi linee, che all'interno di ogni teoria matematica esistono delle proposizioni "indecidibili", delle quali cioè non si può dimostrare né la verità né la falsità.

Gli sviluppi delle ricerche più recenti nel campo della logica hanno, infine, prodotto numerose applicazioni nello studio dei linguaggi dei calcolatori.

2. Le proposizioni

La logica è parte integrante della matematica: essa verifica l'esattezza dei ragionamenti, interviene nella sistemazione razionale della disciplina e contribuisce con il suo simbolismo a chiarire il discorso matematico.

Concetto fondamentale della logica è la proposizione logica (o enunciato). Una **proposizione logica** (o enunciato) è un'espressione linguistica per la quale si possa stabilire con oggettività se essa è vera oppure è falsa. Non sono proposizioni logiche le interrogazioni, le esclamazioni, i giudizi soggettivi, le frasi senza senso, ecc.

Esempi

Proposizioni logiche	Proposizioni non logiche
Roma è la capitale d'Italia	Che ora sono ? (frase interrogativa)
2 è maggiore di 3	Che paura ! (frase esclamativa)
Il cane ha 4 zampe	La pizza è buonissima (frase dichiarativa)

Una **proposizione atomica** o **elementare** è una proposizione costituita da un solo predicato.

Gli elementi fondamentali di una proposizione sono il **predicato** e gli **argomenti**.

Il predicato individua una proprietà dell'argomento o una relazione tra gli argomenti

Esempi

Proposizione logica	Argomento/i	Predicato
Roma è la capitale d'Italia	Roma	è la capitale d'Italia
$2 > 3$	2 e 3	è maggiore di
Il numero 5,7 è un numero razionale	Il numero 5,7	è un numero razionale

L'ingresso della logica nei programmi di matematica è avvenuto in concomitanza con quello dell'informatica poiché lo studio della logica richiede l'elaborazione di linguaggi formali che sono in sintonia con i linguaggi di programmazione.

La logica assume un ruolo fondamentale nella progettazione e nella programmazione dei calcolatori elettronici.

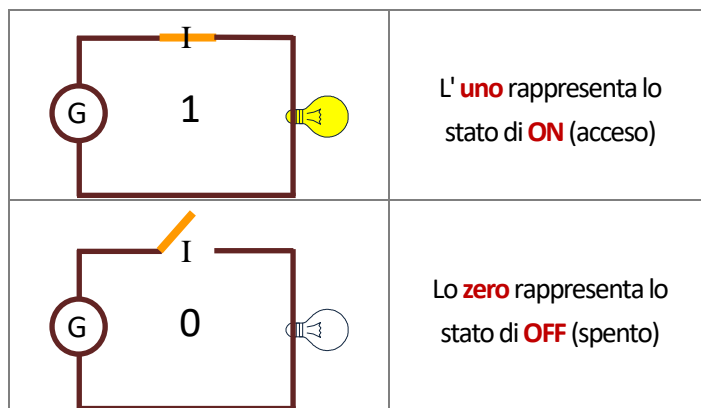
Le funzioni logiche svolte dai complessi circuiti elettronici dei computer sono basati sulla cosiddetta algebra di Boole. L'algebra di Boole instaura uno stretto collegamento concettuale tra i circuiti elettrici e la logica. Essa rappresenta la base teorica per la progettazione dei circuiti elettronici del computer.

Lo studio della logica, quindi, è uno strumento per inquadrare e comprendere il mondo dei calcolatori ed è indispensabile se ci si vuole rivolgere ad esso non come utenti passivi, ma con mentalità critica e voglia di capirne i risvolti concettuali e teorici.

L'elaboratore è programmato per eseguire determinate funzioni che si basano sulla verità o sulla falsità di certe **proposizioni atomiche**, come per esempio "5 > 3" (proposizione atomica vera), oppure "7 è divisibile per 2" (proposizione atomica falsa).

La verità o la falsità di una **proposizione atomica** viene indicata con i termini "valore di verità" nel senso che una proposizione può essere **vera** oppure **falsa**.

(*vero* = 1 ; *falso* = 0), ma non entrambe le cose.



3. I connettivi

Le proposizioni logiche atomiche possono essere combinate tra loro mediante degli operatori, detti connettivi logici, dando origine a nuove proposizioni, dette **proposizioni molecolari**, il cui valore di verità è determinato dal valore di verità delle sue proposizioni atomiche e dai connettivi logici che le collegano.

Un **connettivo** è un operatore logico che stabilisce una relazione fra due proposizioni e dà origine a una terza proposizione che risulta vera o falsa in base ai valori delle due proposizioni e al tipo di connettivo utilizzato.

I principali connettivi logici binari sono:

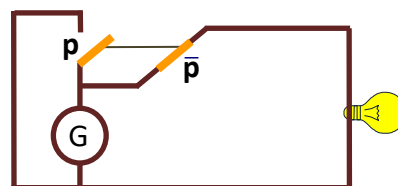
- ✚ la congiunzione **e** (in latino et, in logica booleana AND) indicata con il simbolo \wedge
- ✚ la disgiunzione inclusiva **o** (in latino vel, in logica booleana OR) indicata con il simbolo \vee
- ✚ la disgiunzione esclusiva **o** (in latino aut, in logica booleana XOR) indicata dal simbolo $\dot{\vee}$
- ✚ l'implicazione logica **se ... allora ...** indicata col simbolo \rightarrow
- ✚ la coimplicazione **se e solo se** indicata col simbolo \leftrightarrow
- ✚ la negazione **non**, indicata con il simbolo \bar{p} , la quale opera su un'unica proposizione.

Negazione

La **negazione** di una proposizione p è la proposizione \bar{p} che ha valore di verità opposto a quello di p .

Tavola di verità
non p

p	\bar{p}
V	F
F	V

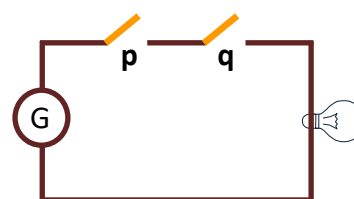


Congiunzione

La **congiunzione** di due proposizioni p e q è la proposizione $p \wedge q$ che è vera soltanto se p e q sono entrambe vere.

Tavola di verità
p e q

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F



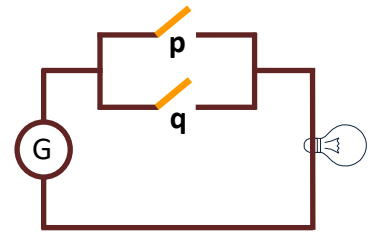
Disgiunzione inclusiva

La **disgiunzione inclusiva** di due proposizioni p e q è la proposizione $p \vee q$ che è falsa soltanto se p e q sono entrambe false.

Tavola di verità

$p \vee q$

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F



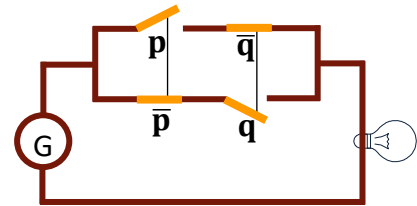
Disgiunzione esclusiva

La **disgiunzione esclusiva** di due proposizioni p e q è la proposizione $p \dot{\vee} q$ che è vera soltanto se una delle due è vera

Tavola di verità

$p \dot{\vee} q$

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F



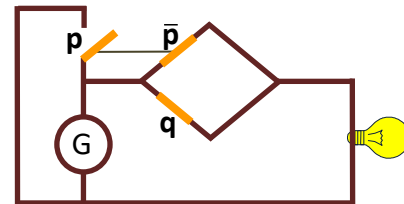
Implicazione materiale

L'**implicazione materiale** di due proposizioni p e q è la proposizione $p \rightarrow q$ che è falsa soltanto se p è vera e q è falsa

Tavola di verità

se p allora q

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V



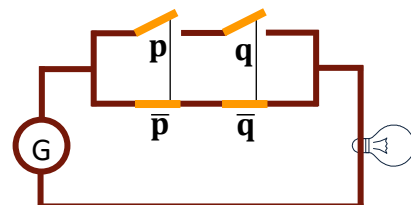
Coimplicazione materiale

La **coimplicazione materiale** di due proposizioni p e q è la proposizione $p \leftrightarrow q$, che è vera soltanto se p e q sono entrambe vere o entrambe false.

Tavola di verità

p se e solo se q

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V



Nel linguaggio comune, le frasi che hanno la struttura “se ... allora ...” si usano per affermare un legame causa-effetto tra l'antecedente e il conseguente (tra la premessa e la conseguenza).

In logica invece, la struttura “se ... allora ...” è considerata vera o falsa solo in base alla tavola di verità che la definisce, indipendentemente dal fatto che tra l'antecedente e il conseguente vi sia un legame causa-effetto.

Esempio: “se Roma è la capitale della Francia allora $2 < 3$ ” è una proposizione vera, anche se non c'è alcun legame causa-effetto.

Proposizioni equivalenti

Due proposizioni nelle stesse variabili si dicono **logicamente equivalenti** se hanno uguali tavole di verità.

$$p \rightarrow q = \bar{p} \vee q$$

p	q	\bar{p}	$p \rightarrow q$	$\bar{p} \vee q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

$$p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

$$p \leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$$

p	q	\bar{p}	\bar{q}	$p \leftrightarrow q$	$p \wedge q$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$
V	V	F	F	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F	F
F	F	V	V	V	F	V	V

Proprietà dei connettivi

Proprietà	\vee	\wedge
Commutativa	$p \vee q = q \vee p$	$p \wedge q = q \wedge p$
Associativa	$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$	$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$
Distributiva	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Idempotenza	$p \vee p = p$	$p \wedge p = p$
Leggi di Assorbimento	$p \vee (p \wedge q) = p$	$p \wedge (p \vee q) = p$
Leggi di De Morgan	$\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$	$\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$
Proprietà della Complementarietà (o legge della doppia negazione)		$\overline{\bar{p}} = p$

Augustus De Morgan (1806-1871) matematico e logico inglese

Implicazione contraria, inversa e contronominale o controinversa

Data l'implicazione materiale **diretta** $p \rightarrow q$:

$q \rightarrow p$ è detta implicazione **inversa** di $p \rightarrow q$

$\bar{p} \rightarrow \bar{q}$ è detta implicazione **contraria** di $p \rightarrow q$

$\bar{q} \rightarrow \bar{p}$ è detta implicazione **contronominale** di $p \rightarrow q$

L'implicazione materiale diretta è equivalente alla implicazione contronominale.

A lato è rappresentata la tavola di equivalenza logica delle due proposizioni.

p	q	\bar{p}	\bar{q}	$p \rightarrow q$	$\bar{q} \rightarrow \bar{p}$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Esempio: $p \rightarrow q$: "Se Tom è un gatto allora Tom è un mammifero" è equivalente alla proposizione $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$: "se Tom non è un mammifero allora Tom non è un gatto".

Tautologie e contraddizioni

Una **tautologia** è una proposizione che risulta sempre vera qualunque sia il valore di verità delle lettere enunciative che la compongono. Per indicare che una proposizione p è una tautologia si scrive: $\models p$.

Una **contraddizione** è una proposizione che risulta sempre falsa qualunque sia il valore di verità delle lettere enunciative che la compongono.

Per dimostrare che una proposizione è una tautologia occorre costruire la relativa tavola di verità e verificare che risulta sempre vera.

Per dimostrare che una proposizione è una contraddizione occorre costruire la relativa tavola di verità e verificare che risulta sempre falsa.

Proprietà della tautologia	$(V) \vee p = (V)$	$(V) \wedge p = p$
-----------------------------------	--------------------	--------------------

Dimostrazione

(V)	p	$(V) \vee p$
V	V	V
V	F	V

(V)	p	$(V) \wedge p$
V	V	V
V	F	F

Proprietà della contraddizione	$(F) \vee p = p$	$(F) \wedge p = (F)$
---------------------------------------	------------------	----------------------

Dimostrazione

(F)	p	$(F) \vee p$
F	V	V
F	F	F

(F)	p	$(F) \wedge p$
F	V	F
F	F	F

I principi della logica

Principio di identità	$p = p$	Ogni oggetto del pensiero logico è uguale a se stesso e a nessun altro oggetto
Principio del terzo escluso	$p \vee \bar{p} = (V)$	Una proposizione o è vera o è falsa, non esiste un terzo valore di verità
Principio di non contraddizione	$p \wedge \bar{p} = (F)$	Una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa

Dimostrazione

p	\bar{p}	$p \vee \bar{p}$
V	F	V
F	V	V

p	\bar{p}	$p \wedge \bar{p}$
V	F	F
F	V	F

4. La logica e gli insiemi

Enunciati e insiemi di verità

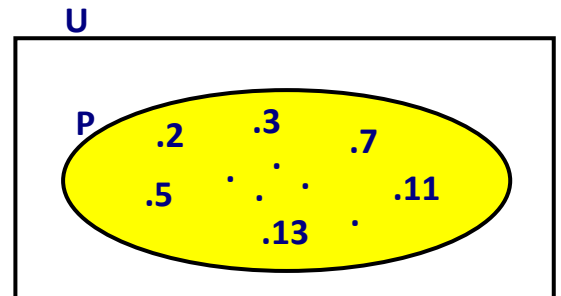
Un **enunciato aperto** è un enunciato contenente almeno una variabile, il cui valore deve essere scelto in un insieme universo.

L'**insieme di verità** di un enunciato aperto $p(x)$ è l'insieme dei valori, scelti nell'insieme universo U , che sostituiti alla variabile x trasformano l'enunciato aperto in una proposizione vera.

Esempio:

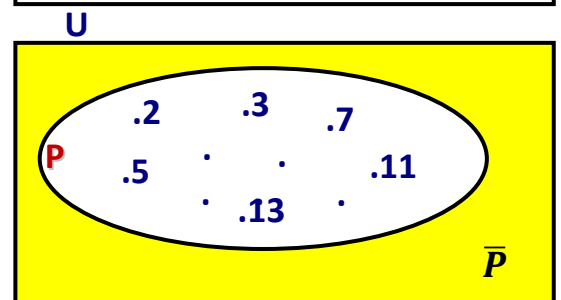
Nell'insieme universo $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}\}$,

l'enunciato aperto $p(x)$: "x è un numero primo" ha come insieme di verità l'insieme $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$.



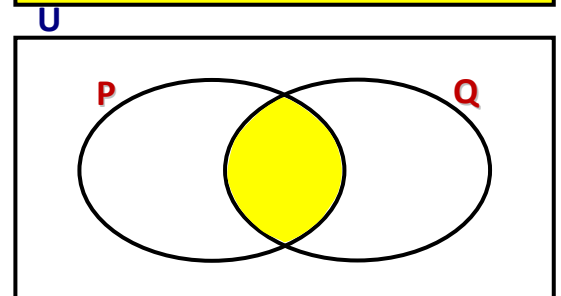
Negazione e complementare

Dato l'enunciato aperto $p(x)$, definito in un insieme universo U , l'insieme di verità di $\bar{p}(x)$ è il complementare, rispetto ad U , dell'insieme di verità di $p(x)$.



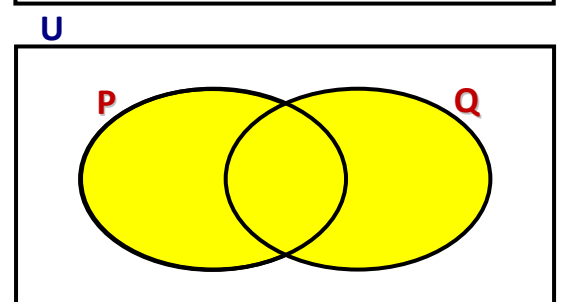
Congiunzione e intersezione

Dati gli enunciati aperti $p(x)$ e $q(x)$, definiti nello stesso insieme universo U , l'insieme di verità di $p(x) \wedge q(x)$ è l'intersezione dei due insiemi di verità di $p(x)$ e $q(x)$.



Disgiunzione e unione

Dati gli enunciati aperti $p(x)$ e $q(x)$, definiti nello stesso insieme universo U , l'insieme di verità di $p(x) \vee q(x)$ è l'unione dei due insiemi di verità di $p(x)$ e $q(x)$.



Esempi

Sono dati gli enunciati aperti $p(x)$: "x è divisore di 18" e $q(x)$: "x è divisore di 24", definiti nello stesso insieme universo $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}\}$.

L'insieme di verità di $p(x)$ è l'insieme $P = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

L'insieme di verità di $q(x)$ è l'insieme $Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

L'insieme di verità di $p(x) \wedge q(x)$ è l'insieme $P \cap Q = \{1, 2, 3, 6\}$

L'insieme di verità di $p(x) \vee q(x)$ è l'insieme $P \cup Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$

L'insieme di verità di $\bar{p}(x)$ è l'insieme $\bar{P} = \{0, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, \dots\}$

Condizione necessaria e condizione sufficiente

Data l'implicazione logica $p \Rightarrow q$:

- ✚ la verità di p è una condizione sufficiente per la verità di q
- ✚ la verità di q è una condizione necessaria per la verità di p .

Esempio 1

“Se x è nato a Trebisacce allora x è nato in Italia”.

La condizione “ x è nato a Trebisacce” è una condizione sufficiente per la verità di “ x è nato in Italia”.

La condizione “ x è nato in Italia” è una condizione necessaria per la verità di “ x è nato a Trebisacce”.

Esempio 2

“Se x è una mamma allora x è una donna”.

La condizione x è una mamma è una condizione sufficiente per la verità di x è una donna.

La condizione x è una donna è una condizione necessaria per la verità di x è una mamma.

Nella coimplicazione logica $p \Leftrightarrow q$, la verità di p è una condizione necessaria e sufficiente per la verità di q è viceversa

Esempio

“Un triangolo ha i tre lati congruenti se è solo se ha i tre angoli congruenti”.

La condizione “un triangolo ha i tre lati congruenti” è una condizione necessaria e sufficiente per la verità della proposizione “un triangolo ha tre angoli congruenti”. Viceversa, la condizione “un triangolo ha i tre angoli congruenti” è una condizione necessaria e sufficiente per la verità della proposizione “un triangolo ha tre lati congruenti”.

5. Quantificatori

Per descrivere le diverse espressioni del linguaggio naturale non basta utilizzare i connettivi fin qui descritti, ma occorre introdurre nuovi enti, detti quantificatori, per formalizzare espressioni del tipo:

- ✚ Tutti i filosofi sono uomini
- ✚ Nessun uomo è immortale
- ✚ Qualche numero è primo
- ✚ Qualche numero non è pari

Quantificatore esistenziale

Il quantificatore esistenziale afferma che esiste almeno un elemento dell'insieme universo U che verifica la proprietà considerata.

si scrive	si legge
$\exists x \in U$	esiste almeno un elemento x nell'insieme universo U

Quantificatore universale

Il quantificatore universale afferma che ogni elemento dell'insieme universo U verifica la proprietà considerata.

si scrive	si legge
$\forall x \in U$	Per ogni elemento x dell'insieme universo U

Osservazione

Un enunciato aperto $p(x)$ può essere trasformato in una proposizione vera o falsa, oltre che sostituendo alla variabile x un particolare valore, anche utilizzando i quantificatori esistenziale e universale.

Esempio

L'enunciato aperto $p(x)$: " x è un multiplo di 3" definito nell'insieme universo $U = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, può essere trasformato:

✚ nella seguente proposizione vera, utilizzando il quantificatore esistenziale:

p : " $\exists x \in U \mid x$ è multiplo di 3".

[esistono due multipli del 3: 3 e 6]

✚ nella seguente proposizione falsa, utilizzando il quantificatore universale:

q : " $\forall x \in U \mid x$ è multiplo di 3".

[non tutti i numeri sono multipli del 3]

Negazione di una proposizione

La negazione di una proposizione atomica si ottiene negando il predicato.

Esempi

p	\bar{p}
Trebisacce si trova in Calabria	Trebisacce non si trova in Calabria
$2 > 3$	$2 \leq 3$

La negazione di proposizioni o enunciati aperti contenenti i connettivi « \wedge » ed « \vee » si ottiene utilizzando le leggi di De Morgan.

$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$
$p \vee q$	$\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$

Esempi

Paolo mangia e legge	Paolo non mangia o non legge
Luigi gioca a calcio o va in bicicletta	Luigi non gioca a calcio e non va in bicicletta
$2 < x \leq 5$ equivalente a $x > 2 \wedge x \leq 5$	$x \leq 2 \vee x > 5$

La negazione dell'implicazione logica è data da:

$p \rightarrow q$	$\overline{p \rightarrow q} = p \wedge \bar{q}$
-------------------	---

Esempio

$p \rightarrow q$	$\overline{p \rightarrow q} = p \wedge \bar{q}$
Se bevo il vino mi ubriaco	Bevo il vino e non mi ubriaco

Ponendo p : "bevo il vino " e q : "mi ubriaco"

si ottiene la proposizione formalizzata: $p \rightarrow q$

ricordando l'equivalenza: $p \rightarrow q = \bar{p} \vee q$

la negazione diventa: $\overline{p \rightarrow q} = \overline{\bar{p} \vee q}$

applicando la 1a legge di De Morgan: $\overline{\bar{p} \vee q} = \bar{\bar{p}} \wedge \bar{q}$

ricordando l'equivalenza: $\bar{\bar{p}} = p$ si ottiene: $\overline{p \rightarrow q} = p \wedge \bar{q}$

Pertanto la negazione della proposizione "Se bevo il vino mi ubriaco" è "Bevo il vino e non mi ubriaco".

La negazione di una proposizione contenente il quantificatore universale \forall si effettua sostituendo il quantificatore universale con il quantificatore esistenziale e negando il corrispondente predicato.

Esempi

$\forall x \mid p(x)$	$\exists x \mid \overline{p(x)}$
Tutti gli studenti della LS 1A sono pendolari.	Almeno uno studente della LS 1A non è pendolare.

La negazione di una proposizione contenente il quantificatore esistenziale \exists si ottiene sostituendo il quantificatore esistenziale con il quantificatore universale e negando il corrispondente predicato.

Esempi

$\exists x \mid p(x)$	$\forall x \mid \overline{p(x)}$
Almeno uno studente della LS 5A è maggiorenne.	Tutti gli studenti della LS 5A sono minorenni.

6. Regole di deduzione logica

La deduzione logica è un ragionamento mediante il quale, partendo da premesse vere, si ricavano conseguenze vere.

Le principali regole di deduzione logica sono:

- ✚ **Modus ponens**
- ✚ **Modus tollens**
- ✚ **Sillogismo ipotetico**
- ✚ **Sillogismo disgiuntivo**
- ✚ **Riduzione all'assurdo**

Modus ponens

La regola di deduzione “**Modus ponens**” (*modo che afferma*) dice che:

$$\left(\begin{array}{l} \text{se è vera l'implicazione} \\ \text{ed è vera la proposizione} \end{array} \begin{array}{l} p \mapsto q \\ p \end{array} \right) \Rightarrow \text{(è vera la proposizione } q \text{)}$$

In simboli
$[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

Schema logico		
$p \mapsto q$	Se $p \mapsto q$ è vera	1 ^a premessa
p	p è vera	2 ^a premessa
_____		allora si deduce che
q	q è vera	Conseguenza logica

Esempio di
Modus ponens

“Se Francesco era a Parigi all’ora del delitto, allora è innocente
“Francesco era a Parigi all’ora del delitto”

“Francesco è innocente”.

La tabella a lato evidenzia che nell’unico caso in cui la premessa $[(p \rightarrow q) \wedge p]$ è vera, anche la conseguenza logica q è vera.

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

Nota

Il simbolo \Rightarrow della deduzione logica non deve essere confuso con il simbolo \mapsto dell’implicazione materiale, in quanto la deduzione logica indica un ragionamento, mentre l’implicazione materiale è un connettivo.

Modus tollens

La regola di deduzione “**Modus tollens**” (*modo che toglie*) dice che:

$$\left(\begin{array}{l} \text{se è vera l'implicazione} \\ \text{ed è vera la proposizione} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} p \mapsto q \\ \bar{q} \end{array} \right) \Rightarrow \quad \left(\text{è vera la proposizione } \bar{p} \right)$$

In simboli

$$[(p \rightarrow q) \wedge \bar{q}] \Rightarrow \bar{p}$$

Schema logico		
$p \mapsto q$	Se $p \mapsto q$ è vera	1 ^a premessa
\bar{q}	\bar{q} è vera	2 ^a premessa
_____ allora si deduce che		
\bar{p}	\bar{p} è vera	conseguenza logica

Esempio di
Modus tollens

“Se Francesco era a Parigi all’ora del delitto, allora è innocente
“Francesco non è innocente”
_____“Francesco non era a Parigi all’ora del delitto”.

La tabella a lato evidenzia che nell’unico caso in cui la premessa $[(p \rightarrow q) \wedge \bar{q}]$ è vera, anche la conseguenza logica \bar{p} è vera.

p	q	\bar{p}	\bar{q}	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge \bar{q}$
V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V

Sillogismo ipotetico

Il **sillogismo ipotetico** dice che:

$$\left(\begin{array}{l} \text{se è vera l'implicazione} \\ \text{ed è vera l'implicazione} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array} \right) \Rightarrow \quad \left(\text{è vera l'implicazione } p \rightarrow r \right)$$

In simboli

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$$

Schema logico		
$p \mapsto q$	Se $p \mapsto q$ è vera	1 ^a premessa
$q \mapsto r$	e $q \mapsto r$ è vera	2 ^a premessa
_____ allora si deduce che		
$p \mapsto r$	$p \mapsto r$ è vera	conseguenza logica

Esempio di
sillogismo ipotetico

“se studierò sarò promosso”
“se sarò promosso riceverò un regalo”
_____“se studierò riceverò un regalo”

La tabella a lato evidenzia che nei quattro casi in cui la premessa $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ è vera, anche la conseguenza logica $p \rightarrow r$ è vera.

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow r$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V

Sillogismo disgiuntivo

Il **sillogismo disgiuntivo** dice che: $(\text{se è vera } p \vee q \text{ ed è vera } \bar{q}) \Rightarrow (\text{è vera } p)$

In simboli

$$[(p \vee q) \wedge \bar{q}] \Rightarrow p$$

Schema logico		
$p \vee q$	Se $p \vee q$ è vera	1 ^a premessa
\bar{q}	e \bar{q} è vera	2 ^a premessa
allora si deduce che		
p	p è vera	conseguenza logica

Esempio di sillogismo disgiuntivo

	“Pierino mangia o dorme”
	“Pierino non dorme”
	—————
	“Pierino mangia”

La tabella a lato evidenzia che nell'unico caso in cui la premessa $(p \vee q) \wedge \bar{q}$ è vera, anche la conseguenza logica p è vera.

p	q	\bar{q}	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \bar{q}$
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	F	F

Riduzione all'assurdo

La riduzione all'assurdo (in latino *reductio ad absurdum*) è un ragionamento in cui si assume temporaneamente un'ipotesi, si giunge ad una conclusione assurda, e quindi si conclude che l'assunto originale deve essere errato.

In simboli

$$[\bar{p} \mapsto f] \Rightarrow p$$

Schema logico		
$\bar{p} \mapsto f$	Se $\bar{p} \mapsto f$ è vera	premessa
p	p è vera	conseguenza logica

Validità di un ragionamento

Per stabilire la validità di un ragionamento che non rientra nei casi sopra menzionati si possono utilizzare le seguenti due metodologie:

Metodologia 1

Per stabilire la validità di un ragionamento occorre verificare che si tratti di una tautologia.

Esempio

Stabilisci se il seguente ragionamento è corretto.

Leggo il giornale o gioco a carte

Se guardo la TV allora non gioco a carte

Se guardo la TV allora leggo il giornale

Le proposizioni elementari sono: a : "Leggo il giornale" b : "gioco a carte" c : "guardo la TV"

Il relativo schema di deduzione è:

$$\frac{a \vee b \quad c \rightarrow \bar{b}}{c \rightarrow a}$$

Costruiamo la tavola di verità di tutto il ragionamento:

a	b	c	\bar{b}	$a \vee b$	$c \rightarrow \bar{b}$	$(a \vee b) \wedge (c \rightarrow \bar{b})$	$c \rightarrow a$	$[(a \vee b) \wedge (c \rightarrow \bar{b})] \rightarrow (c \rightarrow a)$
V	V	V	F	V	F	F	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	F	V	F	V	V

Avendo dimostrato che la proposizione $[(a \vee b) \wedge (c \rightarrow \bar{b})] \rightarrow (c \rightarrow a)$ è una tautologia, il ragionamento è **corretto**.

Metodologia 2

Dallo schema di deduzione:

$$\frac{a \vee b \quad c \rightarrow \bar{b}}{c \rightarrow a}$$

Costruiamo la tavola di verità della premessa e della conclusione:

Dall'esame della tavola di verità, si osserva che:
nei 4 casi in cui la premessa $(a \vee b) \wedge (c \rightarrow \bar{b})$ è vera,
anche la conseguenza logica $c \rightarrow a$ è vera.
Pertanto il ragionamento è **corretto**.

Se in quei 4 casi in cui la premessa è vera, la conseguenza logica $c \rightarrow a$ non fosse risultata sempre vera, il ragionamento non sarebbe stato corretto.

a	b	c	\bar{b}	$a \vee b$	$c \rightarrow \bar{b}$	$(a \vee b) \wedge (c \rightarrow \bar{b})$	$c \rightarrow a$
V	V	V	F	V	F	F	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F	F
F	V	F	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	F	V	F	V

7. Sillogismi aristotelici

Il **sillogismo aristotelico** è un ragionamento corretto in base al quale da due proposizioni vere (premesse) si deduce la verità di una terza proposizione (conclusione).

Ciascuna delle tre proposizioni componenti un sillogismo è un **giudizio essenziale aristotelico**, che presenta una delle seguenti forme:

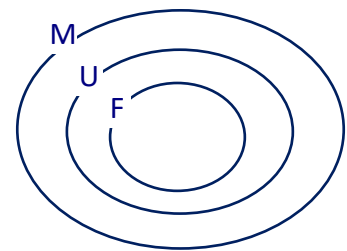
- ☒ Universale affermativo
- ☒ Universale negativo
- ☒ Particolare affermativo
- ☒ Particolare negativo

Per dimostrare la correttezza di un ragionamento conviene utilizzare i diagrammi di Eulero-Venn e le relazioni insiemistiche associate ai giudizi.

Esempio 1

<i>premessa 1</i> (universale affermativo)	<i>Tutti i filosofi sono uomini</i>
<i>premessa 2</i> (universale affermativo)	<i>Tutti gli uomini sono mortali</i>
<i>conclusione</i> (universale affermativo)	<i>Tutti i filosofi sono mortali</i>

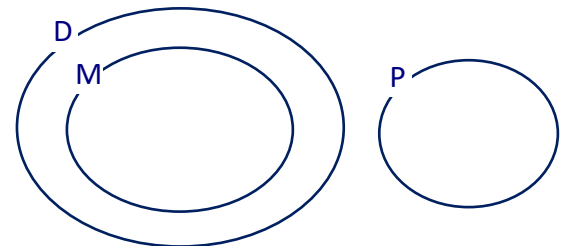
$$\begin{array}{l} U \subseteq M \quad \text{Vero} \\ F \subseteq U \quad \text{Vero} \\ \hline F \subseteq M \quad \text{Vero} \end{array}$$



Esempio 2

<i>premessa 1</i> (universale affermativo)	<i>Tutte le mamme sono donne</i>
<i>premessa 2</i> (universale negativo)	<i>Nessun papà è una donna</i>
<i>conclusione</i> (universale negativo)	<i>Nessun papà è una mamma</i>

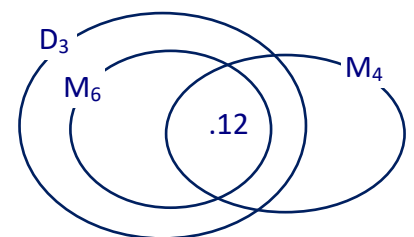
$$\begin{array}{l} M \subseteq D \quad \text{Vero} \\ P \cap D = \emptyset \quad \text{Vero} \\ \hline P \cap M = \emptyset \quad \text{Vero} \end{array}$$



Esempio 3

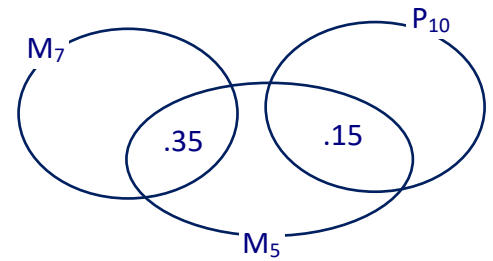
<i>premessa 1</i> (particolare affermativo)	<i>Qualche multiplo di 6 è multiplo di 4</i>
<i>premessa 2</i> (universale affermativo)	<i>Tutti i multipli del 6 sono divisibili per 3</i>
<i>conclusione</i> (particolare affermativo)	<i>Qualche numero divisibile per 3 è multiplo di 4</i>

$$\begin{array}{l} M_6 \cap M_4 \neq \emptyset \quad \text{Vero} \\ M_6 \subseteq D_3 \quad \text{Vero} \\ \hline D_3 \cap M_4 \neq \emptyset \quad \text{Vero} \end{array}$$



Esempio 4

<i>premessa 1</i> (universale negativo)	Nessuna potenza di 10 è multipla di 7
<i>premessa 2</i> (particolare affermativo)	Qualche multiplo di 7 è multiplo di 5
<i>conclusione</i> (particolare negativo)	Qualche multiplo di 5 non è potenza di 10



$$P_{10} \cap M_7 = \emptyset \quad \text{Vero}$$

$$M_7 \cap M_5 \neq \emptyset \quad \text{Vero}$$

$$M_5 - P_{10} \neq \emptyset \quad \text{Vero}$$

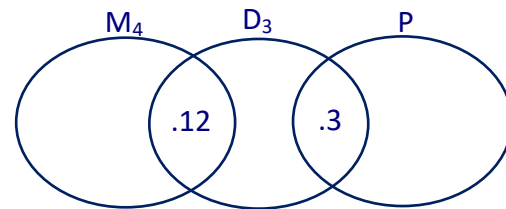
Esempio 5

<i>premessa 1</i> (particolare affermativo)	Qualche multiplo di 4 è divisibile per 3
<i>premessa 2</i> (universale negativo)	Nessun multiplo di 4 è un numero primo
<i>conclusione</i> (universale negativo)	Nessun numero primo è divisibile per 3

$$M_4 \cap D_3 \neq \emptyset \quad \text{Vero}$$

$$M_4 \cap P = \emptyset \quad \text{Vero}$$

$$P \cap D_3 = \emptyset \quad \text{Falso}$$



Il ragionamento esaminato non è corretto.

8. Problemi di logica

I problemi di logica hanno tipologie diverse: problemi classici, paradossi, ragionamenti di cui trovare gli errori, giochi ecc... Non esiste un metodo di risoluzione che valga per tutte le tipologie, ma ogni tipo di problema ha una approccio risolutivo diverso. Esaminiamo alcuni problemi.

Problema 1

Le seguenti tre proposizioni sono tutte vere:

- Paolo è amico di Lucia o di Barbara;
- Se Paolo è amico di Lucia, allora è amico anche di Barbara;
- Se Paolo non è amico di Barbara, allora è amico di Lucia.

Chi sono gli amici di Paolo ?

Soluzione

Indichiamo con p : "Paolo è amico di Lucia" e con q : "Paolo è amico di Barbara"

Le tre proposizioni sono vere: $p \vee q$ $p \rightarrow q$ $\bar{q} \rightarrow p$

Per scoprire in corrispondenza di quali valori di verità di p e q le tre proposizioni risultano contemporaneamente vere, occorre costruire le loro tavole di verità.

p	q	\bar{q}	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$\bar{q} \rightarrow p$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F

I casi in cui tutte e tre le proposizioni sono vere coincidono con la prima e la terza riga.

In queste due situazioni la proposizione q è sempre vera: ciò vuol dire che è vero che "Paolo è amico di Barbara"

La proposizione p in un caso è vera e in un altro è falsa. Pertanto non si può stabilire se "Paolo sia amico o no di Lucia"

