Logica matematica
Esempi

1. Stabilisci il grado di verità delle seguenti proposizioni logiche:

p: "$Non\ è\ vero\ che\ 2\ non\ è\ pari$" V
p: "$5\ non\ è\ multiplo\ di\ 2\ \ o\ \ 3\ non\ è\ divisore\ di\ 6$" V
p: "$Non\ è\ vero\ che: \ Trebisacce\ non\ è\ in\ Calabria\ \ e\ \ Cosenza\ è\ in\ Italia$" V
p: "$Il\ triangolo\ ha\ tre\ lati\ e\ il\ rettangolo\ ha\ tre\ angoli$" F
p: "$Il\ gatto\ ha\ quattro\ zampe\ o\ Trebisacce\ è\ in\ Liguria$" V
p: "$Se\ Cosenza\ è\ in\ Egitto,\ allora\ Roma\ è\ la\ capitale\ della\ Francia$" V

2. Data la proposizione p: "$Talvolta\ la\ mattina\ non\ faccio\ colazione$" la sua negazione è:

☐ $\bar{p}$: "$La\ mattina\ faccio\ sempre\ colazione$"

3. Data la proposizione p: "$Tutti\ gli\ studenti\ della\ IV\ B\ hanno\ la\ sufficienza\ in\ matematica$", la sua negazione è:

☐ $\bar{p}$: "$Almeno\ uno\ studente\ della\ IV\ B\ non\ ha\ la\ sufficienza\ in\ matematica$"

4. Stabilisci quale delle seguenti è la negazione della proposizione: "Guido e mangio".

☐ Non guido e non mangio
☐ Non guido e mangio
☐ Guido e non mangio
☐ Non guido o non mangio

Soluzione

Ricordando la 1ª legge di De Morgan: $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$

si ha che la negazione della proposizione "Guido e mangio" è " Non guido o non mangio".

5. Stabilisci quale delle seguenti è la negazione della proposizione: "Se guido non mangio".

☐ Non guido e mangio
☐ Guido e mangio
☐ Se guido non mangio
☐ Se non guido mangio

Soluzione

Ponendo a: "$Guido$" e b: "$mangio$"

La proposizione data è formalizzata in: $a \to \bar{b}$ Ricordando che: $a \to b = \bar{a} \vee b$ si ha:

$\overline{a \to \bar{b}} = \overline{\bar{a} \vee \bar{b}}$ applicando la 1ª legge di De Morgan $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$ si ha:

$\overline{\bar{a} \vee \bar{b}} = \bar{\bar{a}} \wedge \bar{\bar{b}}$ ricordando che: $\bar{\bar{a}} = a$ si ha:

$\bar{\bar{a}} \wedge \bar{b} = a \wedge \bar{b}$

Pertanto la negazione della proposizione "Se guido non mangio" è " Guido e mangio".

6. In ogni scuola c'è almeno una classe in cui sono tutti promossi. Quale dei seguenti enunciati rappresenta la sua negazione?

A. In ogni scuola c'è almeno una classe in cui sono tutti bocciati
B. In ogni scuola c'è almeno un bocciato in tutte le classi
C. C'è almeno una scuola che ha dei promossi in ogni classe
D. <u>C'è almeno una scuola che ha almeno un bocciato in ogni classe</u>
E. C'è almeno una scuola in cui c'è una classe che ha almeno un bocciato.

7. Stabilisci quale delle seguenti è la negazione della proposizione: "Tutti gli studenti della 1B sono minorenni"

☐ Tutti gli studenti della 1C sono maggiorenni
☐ Tutti gli studenti della 1C hanno più di 18 anni
☐ Almeno uno studente della 1C ha 18 anni
☐ <u>Almeno uno studente della 1C non è minorenne</u>

8. Data l'implicazione materiale $p \rightarrow q$: "Se 36 è un numero pari, allora 36 è divisibile per 2" determina: la sua implicazione contraria, la sua implicazione inversa, la sua implicazione contronominale.

Contraria $\quad \bar{p} \rightarrow \bar{q}$: " *Se* 36 *non* è *un numero pari*, *allora* 36 *non* è *divisibile per* 2 "

Inversa $\quad q \rightarrow p$: " *Se* 36 è *divisibile per* 2, *allora* 36 è *un numero pari* "

Contronominale $\quad \bar{q} \rightarrow \bar{p}$: " *Se* 36 *non* è *divisibile per* 2, *allora* 36 *non* è *un numero pari* "

9. Ieri non ho fatto colazione e sono andato a scuola, mentre l'altro ieri ho fatto colazione e sono andato a scuola. Quali delle seguenti frasi posso pronunciare senza essere bugiardo? Esponi il tuo ragionamento.

A. Quando faccio colazione non vado mai a scuola
B. Tutte le volte che vado a scuola non faccio colazione
C. Ogni volta che vado a scuola faccio colazione
D. Talvolta vado a scuola senza fare colazione
E. Quando non faccio colazione non vado mai a scuola.

Soluzione: Talvolta vado a scuola senza fare colazione

10. Dimostra la 2ª legge di De Morgan.

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$
V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V

$\bar{p} \vee \bar{q}$
F
V
V
V

11. Verifica che la seguente proposizione è una contraddizione: $[\bar{c} \wedge (a \wedge \bar{b})] \leftrightarrow [a \rightarrow (b \vee c)]$

a	b	c	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$a \wedge \bar{b}$	$[\bar{c} \wedge (a \wedge \bar{b})]$	$b \vee c$	$a \rightarrow (b \vee c)$	$[\bar{c} \wedge (a \wedge \bar{b})] \leftrightarrow [a \rightarrow (b \vee c)]$
V	V	V	F	F	F	F	V	V	F
V	V	F	F	V	F	F	V	V	F
V	F	V	V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	V	V	V	V	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	F	F	V	F	F	V	V	F
F	F	V	V	F	F	F	V	V	F
F	F	F	V	V	F	F	F	V	F

12. Dimostrare che l'implicazione materiale $a \rightarrow b$ è logicamente equivalente all'implicazione contronominale $\bar{b} \rightarrow \bar{a}$.

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$a \rightarrow b$	$\bar{b} \rightarrow \bar{a}$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

13. Verifica che la seguente proposizione è una tautologia: $a \rightarrow (\bar{a} \rightarrow b)$

a	b	$\bar{a}$	$\bar{a} \rightarrow b$	$a \rightarrow (\bar{a} \rightarrow b)$
V	V	F	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	V

14. Verifica che la seguente proposizione è una contraddizione: $[a \rightarrow (b \vee c)] \leftrightarrow [(a \wedge \bar{b}) \wedge \bar{c}]$

a	b	c	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$b \vee c$	$a \rightarrow (b \vee c)$	$a \wedge \bar{b}$	$[(a \wedge \bar{b}) \wedge \bar{c}]$	$[a \rightarrow (b \vee c)] \leftrightarrow [(a \wedge \bar{b}) \wedge \bar{c}]$
V	V	V	F	F	V	V	F	F	F
V	V	F	F	V	V	V	F	F	F
V	F	V	V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	F	V	F	F	F

15. Verifica, sia utilizzando la tavola di verità sia le proprietà dei connettivi, che la proposizione: $(\bar{b} \vee a) \vee [b \wedge (\bar{a} \vee b)]$ è una tautologia.

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{b} \vee a$	$\bar{a} \vee b$	$b \wedge (\bar{a} \vee b)$	$(\bar{b} \vee a) \vee [b \wedge (\bar{a} \vee b)]$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	F	V

Applicando le proprietà dei connettivi logici si ottiene:

$$(\bar{b} \vee a) \vee [b \wedge (\bar{a} \vee b)]$$

Per la proprietà Commutativa: $p \vee q = q \vee p$ si ha:

$$= (\bar{b} \vee a) \vee [b \wedge (b \vee \bar{a})] =$$

Per la proprietà di Assorbimento: $p \wedge (p \vee q) = p$ si ha:

$$= (\bar{b} \vee a) \vee b =$$

Per la proprietà Commutativa: $p \vee q = q \vee p$ si ha:

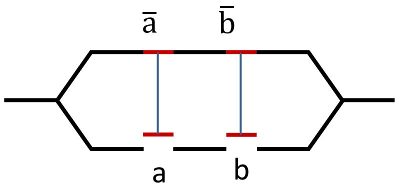
$$= b \vee (\bar{b} \vee a) =$$

Per la proprietà Associativa: $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$ si ha:

$$= (b \vee \bar{b}) \vee a = (\boldsymbol{V}) \vee a = (\boldsymbol{V}) .$$

16. Verifica la seguente equivalenza logica : $a \leftrightarrow b \; = \; (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge b)$ e costruisci il circuito elettrico equivalente.

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a} \wedge \bar{b}$	$a \wedge b$	$(\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge b)$	$a \leftrightarrow b$
V	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*



17. Verifica, sia utilizzando la tavola di verità sia le proprietà dei connettivi, che la proposizione: $[(a \rightarrow b) \rightarrow b] \vee \bar{a}$ è una tautologia.

Utilizzando la tavola di verità si ha:

a	b	$\bar{a}$	$a \rightarrow b$	$(a \rightarrow b) \rightarrow b$	$[(a \rightarrow b) \rightarrow b] \vee \bar{a}$
V	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*
F	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
F	*F*	*V*	*V*	*F*	*V*

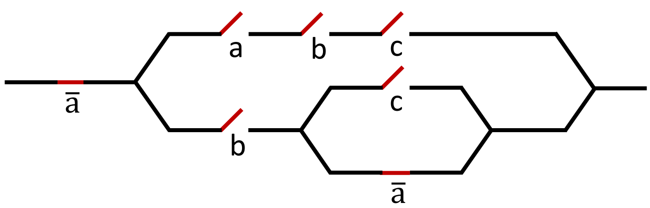
Utilizzando le proprietà dei connettivi si ha:

$$[(a \rightarrow b) \rightarrow b] \vee \bar{a} \;=\; [(\bar{a} \vee b) \rightarrow b] \vee \bar{a} \;=\; \left[\left(\overline{\bar{a} \vee b}\right) \vee b\right] \vee \bar{a} \;=\; \left[\left(a \wedge \bar{b}\right) \vee b\right] \vee \bar{a} \;=\; \left[(a \vee b) \wedge \left(\bar{b} \vee b\right)\right] \vee \bar{a} \;=$$

Ma per il principio del terzo escluso: $\bar{b} \vee b = (\mathbf{V})$. Pertanto si ha:

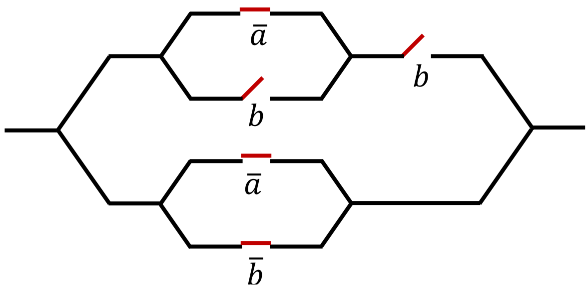
$$= \;[(a \vee b) \wedge (\mathbf{V})] \vee \bar{a} \;=\; (a \vee b) \vee \bar{a} \;=\; (b \vee a) \vee \bar{a} \;=\; b \vee (a \vee \bar{a}) \;=\; b \vee (\mathbf{V}) \;=\; (\mathbf{V}) \;.$$

18. Determina la proposizione corrispondente al seguente circuito:



$$\bar{a} \wedge \{(a \wedge b \wedge c) \vee [b \wedge (c \vee \bar{a})]\}$$

19. Determina la proposizione corrispondente al circuito a lato. Semplifica la proposizione ottenuta utilizzando le proprietà dei connettivi logici e disegna il circuito equivalente più semplice.



La proposizione corrispondente al circuito a lato è: $[(\bar{a} \vee b\,) \wedge b] \vee (\bar{a} \vee \bar{b})$

Essa si può semplificare applicando le proprietà dei connettivi logici.

Per la proprietà Commutativa: $p \wedge q = q \wedge p$ e $p \vee q = q \vee p$ si ha:

$[(\bar{a} \vee b\,) \wedge b] \vee (\bar{a} \vee \bar{b}) = [b \wedge (\bar{a} \vee b\,)] \vee (\bar{a} \vee \bar{b}) = [b \wedge (b \vee \bar{a}\,)] \vee (\bar{a} \vee \bar{b})$

Per la proprietà di Assorbimento: $p \wedge (p \vee q) = p$ si ha:

$[b \wedge (b \vee \bar{a}\,)] \vee (\bar{a} \vee \bar{b}) = b \vee (\bar{a} \vee \bar{b})$

Per la proprietà Commutativa: $p \wedge q = q \wedge p$ e $p \vee q = q \vee p$ si ha:

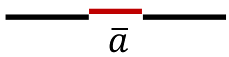
$b \vee (\bar{a} \vee \bar{b}) = (\bar{a} \vee \bar{b}) \vee b$

Per la proprietà Associativa: $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$ si ha:

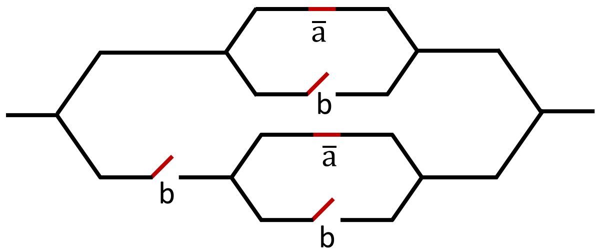
$(\bar{a} \vee \bar{b}) \vee b = \bar{a} \vee (\bar{b} \vee b)$

Essendo $\bar{b} \vee b$ una tautologia, si ha: $\bar{a} \vee (\bar{b} \vee b) = \bar{a}$.

Il cui circuito corrispondente è rappresentato a lato.



20. Determina la proposizione corrispondente al circuito a lato. Semplifica la proposizione ottenuta e disegna un circuito equivalente più semplice.



La proposizione corrispondente al circuito a lato è: $(\bar{a} \vee b\,) \vee [\,b \wedge (\bar{a} \vee b)]$

Essa si può semplificare applicando le proprietà dei connettivi logici.

Per la proprietà Commutativa: $p \vee q = q \vee p$ si ha:

$(\bar{a} \vee b\,) \vee [\,b \wedge (\bar{a} \vee b)] = (\bar{a} \vee b\,) \vee [\,b \wedge (b \vee \bar{a})] =$

Per la proprietà di Assorbimento: $p \wedge (p \vee q) = p$ si ha:

$= (\bar{a} \vee b\,) \vee [\,b \wedge (b \vee \bar{a})] = (\bar{a} \vee b\,) \vee b =$

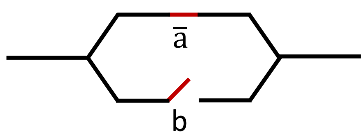
Per la proprietà Associativa: $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$ si ha:

$= (\bar{a} \vee b\,) \vee b = \bar{a} \vee (b \vee b\,) =$

Per la proprietà dell'Idempotenza: $p \vee p = p$ si ha:

$= \bar{a} \vee (b \vee b\,) = \bar{a} \vee b$.

Il cui circuito corrispondente è rappresentato a lato.



21. Date le proposizioni p:"Milano è il capoluogo della Lombardia" ; q:"Il Tevere bagna Roma" ; r:"Il rettangolo ha 3 lati" esprimi in linguaggio naturale la proposizione $(p \wedge q) \longmapsto \bar{r}$ e determina il suo valore di verità.

Soluzione

$(p \wedge q) \wedge \bar{r}$: "Se Milano è il capoluogo della Lombardia e il Tevere bagna Roma allora il rettangolo non ha 3 lati" è una proposizione vera. Infatti costruendo la relativa tavola di verità si ha:

p	q	r	$\bar{r}$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \longmapsto \bar{r}$
V	V	F	V	V	V

22. Dati i predicati: $a(x) : x$ è $un\ divisore\ di\ 16$ e $b(x) : 2x + 1 < 13$ definiti nel Dominio $D = \{1, 4, 5, 6, 8, 10\}$ determina:

a. l'insieme di verità di: $a(x) \vee b(x)$

b. il valore di verità della proposizione: $a(6) \longmapsto \overline{b(6)}$

Soluzione

L'insieme di verità dell'enunciato aperto $a(x) \vee b(x)$ è l'insieme: $A \cup B = \{1, 4, 5, 8\}$

$a(6)$ è una proposizione falsa; $\overline{b(6)}$ è una proposizione vera; $\Rightarrow$ $a(6) \longmapsto \overline{b(6)}$ è una proposizione vera.

23. Dati i predicati $\mathrm{a(x) : x - 7 = 0}$ e $\mathrm{b(x) : x + 1 < 5}$ con $\mathrm{x \in N}$ determina:

a. l'insieme di verità del predicato $a(x)$ è $A = \{7\}$

b. l'insieme di verità del predicato $b(x)$ è $B = \{0, 1, 2, 3\}$

c. l'insieme di verità di $a(x) \vee b(x)$ è $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 7\}$

d. il valore di verità dell'enunciato: $a(3) \wedge b(2)$ è falso.
Infatti essendo $a(3)$ falso e $b(2)$ vero, si ha che $a(3) \wedge b(2)$ è falso.

24. Analizza il seguente ragionamento, individuando le proposizioni elementari e il relativo schema di deduzione. Indica poi se si tratta di un ragionamento corretto.

Soluzione

Le proposizioni elementari sono: p: "piove" q: "esco"
Il relativo schema di deduzione è:

Se non piove, esco	$\bar{p} \rightarrow q$
Piove	p
Non esco	$\bar{q}$

Il ragionamento non è corretto.
Infatti nei due casi in cui entrambe le premesse $\bar{p} \rightarrow q$ e p sono vere la conclusione $\bar{q}$ può essere vera o falsa.

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \rightarrow q$	$(\bar{p} \rightarrow q) \wedge p$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	F	F

25. Stabilisci se è valido il seguente ragionamento:

Se l'acqua non è fredda, faccio il bagno	$\bar{p} \to q$	Avendo posto p: "l'acqua è fredda" e
L'acqua è fredda	p	q: "faccio il bagno"
Non faccio il bagno	$\bar{q}$	

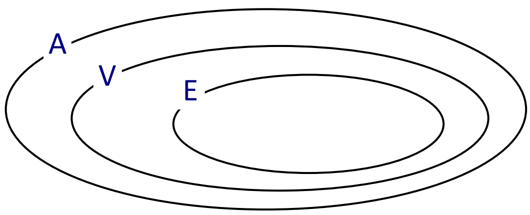
p	q	$\bar{p}$	$\bar{p} \to q$	$(\bar{p} \to q) \wedge p$	$\bar{q}$
V	V	F	V	V	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	F	V

Il ragionamento non è valido. Infatti nei due casi in cui la premessa $(\bar{p} \to q) \wedge p$ è vera, la conseguenza logica $\bar{q}$ può essere vera oppure falsa.

26. Stabilisci se è corretto il seguente ragionamento, effettuando la relativa rappresentazione insiemistica.

Tutti gli elefanti volano
Tutto ciò che vola ha le ali
Gli elefanti hanno le ali

Il ragionamento è corretto.



27. Dati i predicati: $a(x) : x \text{ è } un\ divisore\ di\ 8$ e $b(x) : 2x + 1 < 13$ definiti nel Dominio $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ determina:

a. l'insieme di verità del predicato: $a(x)$
b. l'insieme di verità del predicato: $b(x)$
c. l'insieme di verità di: $\overline{b(x)}$
d. l'insieme di verità di: $a(x) \vee b(x)$
e. l'insieme di verità di: $a(x) \wedge b(x)$
f. il valore di verità dell'enunciato: $a(3) \wedge b(2)$

Soluzione

a. l'insieme di verità del predicato: $a(x)$ è $A = \{1, 2, 4, 8\}$
b. l'insieme di verità del predicato: $b(x)$ è $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
c. l'insieme di verità di: $\overline{b(x)}$ è $\bar{B} = \{6, 7, 8, 9\}$
d. l'insieme di verità di: $a(x) \vee b(x)$ è $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$
e. l'insieme di verità di: $a(x) \wedge b(x)$ è $B = \{1, 2, 4\}$
f. L'enunciato: $a(3) \wedge b(2)$ è Falso, perché: $a(3)$ è $Falso$ e $b(2)$ è $Vero$

28. Simona, Franco, Elisa, Davide e Luigi sono i sospettati di un omicidio. Determina chi ha commesso l'omicidio sapendo che: il colpevole mente sempre e gli altri dicono sempre la verità.
Simona afferma: "Il colpevole è un maschio!"
Elisa dice: "É stata Simona oppure è stato Luigi"
Luigi dice: "Se Franco è colpevole allora Simona è innocente".

Luigi è innocente perché fa un'affermazione vera. *Egli dice che se il colpevole è una persona allora un'altra persona è innocente*. Pertanto Simona o Elisa mente.
Elisa è innocente. Infatti se Elisa fosse la colpevole (Elisa mentirebbe), allora Simona direbbe la verità, cioè che il colpevole è un maschio; ma ciò è in contraddizione con il fatto che la colpevole è stata supposta Elisa.
Ma se Elisa è innocente, dice la verità, cioè che il colpevole è Simona oppure Luigi. Ma essendo Luigi innocente si conclude che Simona è la colpevole.

29. L’impiegato del censimento deve determinare il tipo (onesto o imbroglione) e il titolo di studio degli abitanti di un paese.

In un appartamento abitato da due coniugi ottiene solo queste risposte:
Marito: “siamo entrambi laureati”
Moglie: “siamo entrambi imbroglioni”.
Sapendo che l’onesto dice sempre la verità e l’imbroglione dice sempre la bugia determina chi è l’onesto, chi è l’imbroglione e il loro titolo di studio.

Soluzione:
La moglie non può essere onesta, perché se lo fosse dovrebbe dire la verità, cioè dovrebbe essere un imbroglione.
Pertanto la moglie è un imbroglione.
Ma se la moglie è un imbroglione dice il falso. Quindi non possono essere entrambi imbroglioni.
Si conclude che il marito è onesto, ed essendo onesto dice la verità, cioè che: sono entrambi laureati.