INSIEMI

Insieme

Le nozioni di insieme e di elemento di un insieme sono considerati come concetti primitivi, cioè non definibili mediante concetti più semplici, né riconducibili ad altri concetti definiti in precedenza.

In matematica si usa la parola insieme per indicare un raggruppamento, una raccolta, una collezione di oggetti, detti elementi dell'insieme, che sono tutti distinti fra loro e per i quali l'appartenenza all'insieme non dipende da giudizi soggettivi.

In un insieme :

- ogni suo elemento è ben determinato e distinguibile da ogni altro;
- di ogni elemento si può dire, senza ambiguità, se esso è un elemento o no dell'insieme.

Esempi

Sono insiemi:	Non sono insiemi
Le lettere dell'alfabeto	Le città più belle d'Italia
Le regioni d'Italia	I numeri grandi
I fiumi d'Italia più lunghi di 200 Km	Le montagne più alte d'Europa

In genere, gli insiemi si indicano con le lettere maiuscole dell'alfabeto, mentre i suoi elementi con le lettere minuscole. Esempio $A = \{a, e, i, o, u\}$.

Per indicare che a è un elemento dell'insieme A si scrive: $a \in A$ e si legge: "l'elemento a appartiene all'insieme A".

Per indicare che b non è un elemento dell'insieme A si scrive: $b \notin A$ e si legge: "b non appartiene all'insieme A".

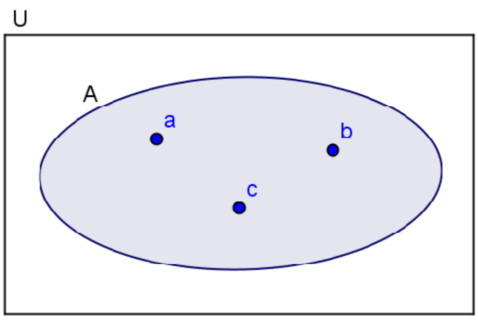
Un insieme si dice **vuoto** e si indica $\varnothing$ oppure $\{\ \}$ se è privo di elementi.

Un insieme si dice **unitario** se è formato da un solo elemento.

Un insieme si dice **infinito** quando l'operazione consistente nel contare i suoi elementi non ha mai termine, o più rigorosamente: se può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

Un insieme si dice **finito** quando l'operazione consistente nel contare i suoi elementi ha termine.

Rappresentazione di un insieme



Gli insiemi possono essere rappresentati in tre diversi modi:

La rappresentazione grafica o mediante **diagramma di Eulero-Venn**, consiste nel raffigurare gli elementi dell'insieme con dei punti interni a una linea piana chiusa.

La rappresentazione per **elencazione** (o estensiva o tabulare), consiste nell'elencare, se possibile, tutti gli elementi che appartengono all'insieme, indipendentemente dall'ordine, entro parentesi graffe e separandoli con la virgola.
Esempio $A = \{a, b, c\}$.
La rappresentazione per **proprietà caratteristica** (o intensiva), consiste nell'enunciare la proprietà che caratterizza in modo oggettivo ed univoco ogni suo elemento.
In simboli: $A = \{x \in U \mid P(x)\}$

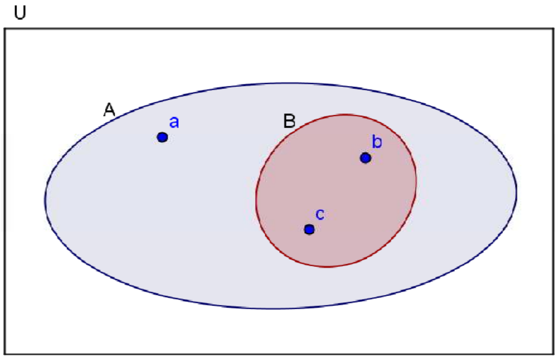
e si legge: A è l'insieme degli elementi x dell'insieme universo (o ambiente) U tali che x verifica il predicato P (x) .

Esempi

$A = \{x \text{ è una lettera dell'alfabeto} \mid x \text{ è una vocale}\}$

$B = \{x \in N \ / \ 3 < x \leq 9\}$

Sottoinsieme



Dati due insiemi A e B, si dice che B è **sottoinsieme** di A, se ogni elemento di B è anche elemento di A.

In simboli : $(B \subseteq A) \;\; \Leftrightarrow \;\; (\forall x \, / \, x \in B \;\; \Longrightarrow \;\; x \in A)$

Ogni insieme ha almeno due sottoinsiemi, se stesso e l'insieme vuoto, detti **sottoinsiemi impropri**.

Tutti i sottoinsiemi di un insieme A, diversi dai sottoinsiemi impropri, sono detti **sottoinsiemi propri**.

Per indicare che B è un sottoinsieme proprio di A si scrive:

$$(B \subset A) \;\; \Leftrightarrow \;\; \big(\forall x \, / \, (x \in B \;\Rightarrow\; x \in A) \;\wedge\; (\exists x \in A \, / \, x \notin B)\big)$$

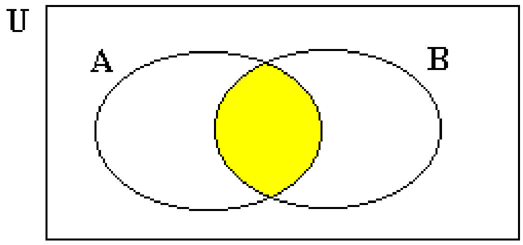
Esempi

Dati $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$ $\quad \Longrightarrow \quad B \subset A$.

Mentre $\emptyset \subseteq \boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A}$.

Operazioni

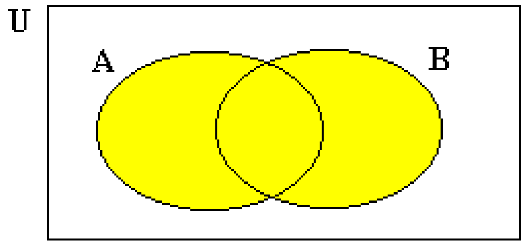
Intersezione



L'intersezione di due insiemi A e B è l'insieme formato dagli elementi che appartengono sia ad A sia a B.

In simboli: $A \bigcap B \; = \; \{x \in U \; / \, x \in A \, \wedge \, x \in B \, \}$

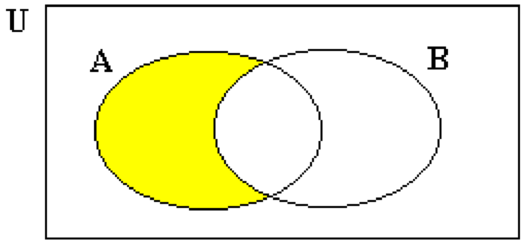
Unione



L'unione di due insiemi A e B è l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A oppure a B.

In simboli: $A \bigcup B = \{x \in U \, / x \in A \, \vee \, x \in B\}$

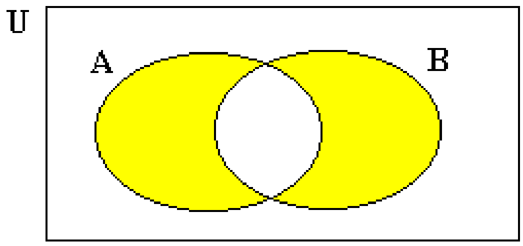
Differenza



La differenza di due insiemi A e B è l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A, ma non a B.

In simboli: $A - B \; = \; \{x \in U \; / \, x \in A \, \wedge \, x \notin \, B \, \}$

Differenza simmetrica

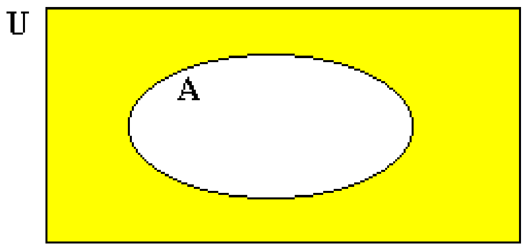


La differenza simmetrica di due insiemi A e B è l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad $A \bigcup B$, ma non ad $A \bigcap B$.

In simboli: $A \; \Delta B \; = \; (A \cup B) \; - \; (A \cap B)$

Oppure $A \; \Delta \; B \; = \; (A - B) \; \bigcup \; (B - A)$

Complementare



L'insieme complementare di un sottoinsieme A dell'insieme universo U, è l'insieme formato dagli elementi che appartengono all'insieme universo U, ma che non appartengono all'insieme A.

In simboli: $\bar{A}^{\,U} = \{x \, / \, x \in U, x \notin A \, \}$

Definizioni

Due insiemi A e B, si dicono **equipotenti** quando hanno lo stesso numero di elementi, e cioè quando esiste una corrispondenza biunivoca fra gli elementi dei due insiemi. In simboli: $|A| = |B|$.

Due insiemi A e B, si dicono **uguali** se, e solo se, sono formati dagli stessi elementi; cioè se ogni elemento di A appartiene a B, e, viceversa, ogni elemento di B appartiene ad A.

In simboli : $A = B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \ / \ x \in A \ \Rightarrow \ x \in B) \quad \wedge \quad (\forall x \ / \ x \in B \ \Rightarrow \ x \in A)$

Oppure $A = B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subseteq B) \ \wedge \ (B \subseteq A)$

Due insiemi A e B, si dicono **diversi** (o distinti) se qualche elemento di A non appartiene a B, o qualche elemento di B non appartiene ad A. In simboli : $A \neq B$.

Due insiemi A e B, si dicono **disgiunti** quando non hanno alcun elemento in comune, cioè quando $A \cap B = \emptyset$.

Proprietà delle operazioni

PROPRIETÀ	UNIONE	INTERSEZIONE
Commutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Idempotenza	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
De Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Complementarietà	$A \cup \overline{A} = U$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$
Assorbimento	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$

Insieme delle parti

Dato un insieme A, l'insieme delle parti di A è l'insieme $P(A)$ formato da tutti i possibili sottoinsiemi dell'insieme A. Se un insieme A è costituito da n elementi, allora l'insieme $P(A)$ è costituito da 2^n elementi.

Esempio

Dato $A = \{1, 2, 3\} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \{ \emptyset, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \}$

Infatti: $|A| = 3 \quad \Rightarrow \quad |P(A)| = 2^3 = 8$.

Partizione di un insieme

Dato un insieme A, la partizione dell'insieme A è la suddivisione dell'insieme A in sottoinsiemi (*parti o classi*) della partizione che godono delle seguenti proprietà:

- i sottoinsiemi sono a due a due disgiunti
- ciascun sottoinsieme è diverso dall'insieme vuoto
- l'unione di tutti i sottoinsiemi è uguale all'insieme A.

Esempio

Dato l'insieme $A = \{x \ / \ x \text{ è } una\ provincia\ italiana\}$

La suddivisione delle province italiane raggruppate per appartenenza ad una data regione rappresenta una partizione dell'insieme A.

Infatti:
regioni diverse hanno province diverse;
ogni regione ha almeno una provincia;
l'unione delle province di tutte le regioni costituiscono l'insieme delle province italiane.

Prodotto cartesiano

Dati due insiemi non vuoti A e B, il prodotto cartesiano A x B è l'insieme di tutte le coppie ordinate (x , y) , con x ∈ A e con y ∈ B. In simboli $A \times B = \{ (x\,, y) \;/\; x \in A \;\wedge\; y \in B\}$

Dati gli insiemi $A = \{a, b\,, c\}$ e $B = \{1, 2\}$, la rappresentazione del prodotto cartesiano può essere realizzata in diversi modi:

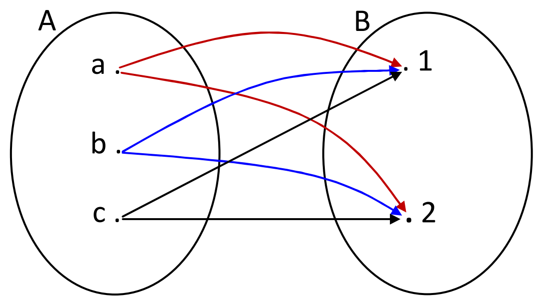
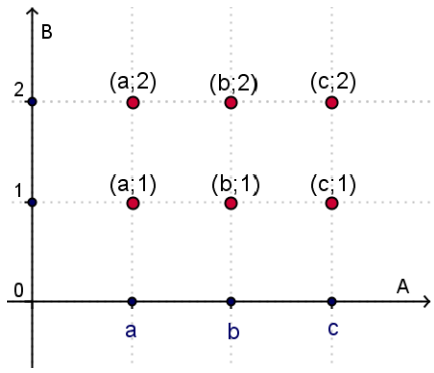
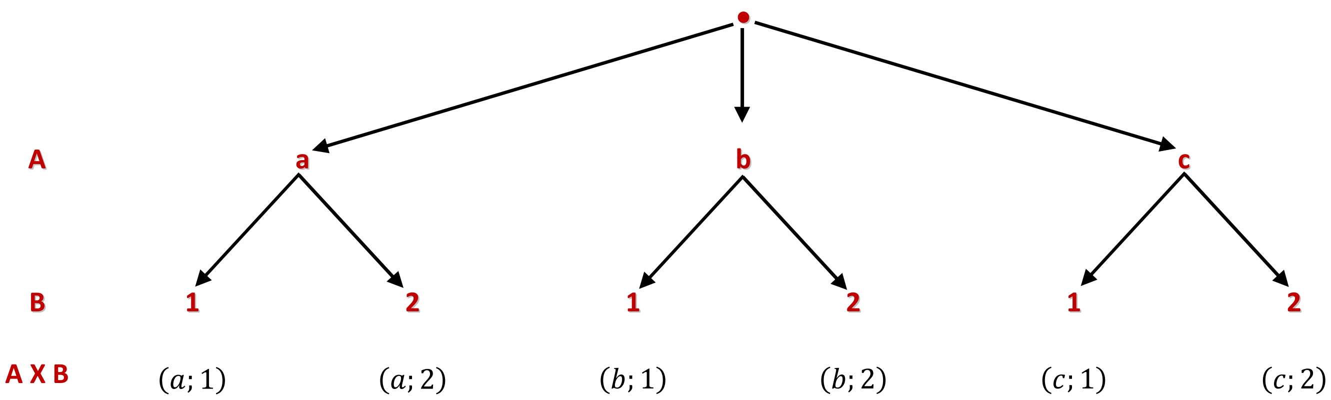
<table>
<tr>
<td>Rappresentazione per elencazione</td>
<td>La rappresentazione per elencazione consiste nell'elencare tutte le coppie del prodotto cartesiano $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$.</td>
<td>$A \times B = \{(a; 1), (a; 2), (b; 1), (b; 2), (c, 1), (c, 2)\}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Rappresentazione sagittale o diagramma a frecce</td>
<td>La rappresentazione tramite diagramma a frecce consiste nel collegare con delle frecce gli elementi dei due insiemi $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$
Ogni freccia parte da un elemento di A e arriva su un elemento di B.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Rappresentazione tramite diagramma cartesiano</td>
<td>La rappresentazione tramite diagramma cartesiano consiste nel rappresentare i punti le cui coordinate sono le coppie del prodotto cartesiano, considerando gli elementi del primo insieme $\boldsymbol{A}$ sull'asse orizzontale e gli elementi del secondo insieme $\boldsymbol{B}$ sull'asse verticale.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Rappresentazione tramite tabella a doppia entrata</td>
<td>La rappresentazione tramite tabella a doppia entrata consiste nel costruire una tabella avente la prima colonna formata dagli elementi del primo insieme $\boldsymbol{A}$ e la prima riga formata dagli elementi del secondo insieme $\boldsymbol{B}$.
Ogni casella corrispondente ad un incrocio riga-colonna rappresenta un elemento del prodotto cartesiano $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$</td>
<td><table>
<tr><th>A\B</th><th>1</th><th>2</th></tr>
<tr><td>a</td><td>$(a; 1)$</td><td>$(a; 2)$</td></tr>
<tr><td>b</td><td>$(b; 1)$</td><td>$(b; 2)$</td></tr>
<tr><td>c</td><td>$(c; 1)$</td><td>$(c; 2)$</td></tr>
</table></td>
</tr>
</table>

Diagramma ad albero



Proprietà del prodotto cartesiano

$A \times B \neq B \times A$ (non gode della proprietà commutativa)

$A \times \varnothing = \varnothing$

$\varnothing \times \varnothing = \varnothing$

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ (proprietà distributiva del prodotto cartesiano rispetto all'unione)

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ (proprietà distributiva del prodotto cartesiano rispetto all'intersezione)

$C \subseteq A \quad \wedge \quad D \subseteq B \qquad \Rightarrow \qquad C \times D \subseteq A \times B\,)$